Sala: 2103	**Octombrie 2014**

CURS 1: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

Fie K corp comutativ cu elementul neutru la înmulţire notat prin 1 iar 0 la adunare.

1.1 Definiţia spaţiului vectorial (liniar)

Definiţie 1.1.1 *O mulţime $V \neq \phi$ se numeşte spaţiu vectorial peste K (sau K-spaţiu vectorial V) dacă pe V se poate defini o operaţie algebrică internă*

$$(x, y) \in V \times V \xrightarrow{+} x + y \in V \quad \text{(numită adunarea vectorilor)}$$

împreună cu care V are o structură de grup abelian, adică îndeplineşte axiomele

$$\begin{array}{ll} A1) & x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V \\ A2) & (x + y) + z = x + (y + z)\,,\ \forall x, y, z \in V \\ A3) & \exists 0_V \in V \text{ a.î. } x + 0_V = x,\ \forall x \in V \\ A4) & \forall x \in V,\ \exists -x \in V \text{ a.î. } x + (-x) = 0_V \end{array}$$

precum şi o operaţie algebrică externă

$$(\alpha, x) \in K \times V \xrightarrow{\cdot} \alpha \cdot x \in V \text{ (numită înmulţirea cu scalari)}$$

astfel încât să îndeplinească axiomele

$$\begin{array}{lll} A5) & (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x & \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x \in V \\ A6) & \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y & \forall \alpha \in K,\ \forall x, y \in V \\ A7) & (\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x) & \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x \in V \\ A8) & 1 \cdot x = x & \forall x \in V. \end{array}$$

Remarcă 1.1.1 *Elementele corpului K se numesc scalari şi se notează cu litere ale alfabetului grec iar elementele $K-$spaţiului vectorial V se numesc vectori şi se notează cu litere ale alfabetului latin.*

Remarcă 1.1.2 *Elementul 0_V se numeşte vectorul nul iar $-x$ opusul vectorului x.*

Remarcă 1.1.3 *Pentru spaţiul vectorial V peste corpul K se foloseşte notaţia (V, K) sau V/K. Dacă $K = \mathbb{R}$ atunci spaţiul vectorial $(V, \mathbb{R})$ se numeşte spaţiu vectorial real iar dacă $K = \mathbb{C}$ atunci spaţiul vectorial $(V, \mathbb{C})$ se numeşte spaţiu vectorial complex.*

Exerciţiul 1.1.1 *Fie K corp comutativ şi*

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times ... \times \mathbb{K}}_{de\ n\ ori} = \left\{ (x_1, ..., x_n)^T \Big| x_i \in \mathbb{K},\ i = 1, ..., n \right\}$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pe $\mathbb{K}^n$ definim operaţiile

- *adunarea:*

$$(x_1, ..., x_n)^T + (y_1, ..., y_n)^T \stackrel{def}{=} (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)^T$$

unde $(x_1, ..., x_n)^T$, $(y_1, ..., y_n)^T \in \mathbb{K}^n$;

- *înmulţirea cu scalari:*

$$\alpha \cdot (x_1, ..., x_n)^T = (\alpha \cdot x_1, ..., \alpha \cdot x_n)^T$$

unde $\alpha \in K$, $(x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{K}^n$.

Să se arate că mulţimea $\mathbb{K}^n$ *înzestrată cu operaţiile "+" şi "·" are o structură de spaţiu vectorial peste corpul* $\mathbb{K}$*, numit spaţiu aritmetic n-dimensional (sau spaţiul coordonatelor).*

Demonstraţie. Elementul $0_V = (0, ..., 0)^T$, respectiv $-x = (-x_1, ..., -x_n)^T$, este vectorul nul din $\mathbb{K}^n$, respectiv, opusul lui x din $\mathbb{K}^n$. Probăm $A1)$ din Definiţia 1.1.1. Pentru aceasta observăm că pentru orice $x = (x_1, ..., x_n)^T, y = (y_1, ..., y_n)^T \in \mathbb{K}$ are loc

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, ..., x_n)^T + (y_1, ..., y_n)^T \stackrel{def}{=} (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)^T \\ &= (y_1 + x_1, ..., y_n + x_n)^T = (y_1, ..., y_n)^T + (x_1, ..., x_n)^T = y + x, \end{aligned}$$

adică axioma $A1)$ a fost verificată. Absolut analog se verifică axiomele $A2) - A8)$ ceea ce arată că mulţimea $\mathbb{K}^n$ este un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$. ■

Remarcă 1.1.4 *Pentru* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *obţinem spaţiul aritmetic n-dimensional* $\mathbb{R}^n$.

1.2 Reguli de calcul într-un spaţiu vectorial

Propoziţie 1.2.1 *Dacă* (V, K) *este spaţiu vectorial atunci*

$$\begin{array}{llll} i) & 0 \cdot x = 0_V & \forall x \in V, & \\ ii) & \forall \alpha \in K \quad \textit{avem} & \alpha \cdot 0_V = 0_V, & \\ iii) & (-1) \cdot x = -x & \forall x \in V, & \\ iv) & \alpha \cdot x = 0_V & \Longleftrightarrow & \alpha = 0 \textit{ sau } x = 0_V \\ v) & \alpha \cdot (x - y) = \alpha \cdot x - \alpha y & \forall x, y \in V, & \forall \alpha \in K \\ vi) & (\alpha - \beta) \cdot x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x & \forall \alpha, \beta \in K, & \forall x \in V \end{array}$$

1.3 Subspaţii vectoriale

Definiţie 1.3.1 *Fie* (V, K) *spaţiu vectorial şi* $X \subset V$, $X \neq \phi$. *Mulţimea* X *se numeşte subspaţiu vectorial al lui* (V, K) *dacă*

i) $\forall x, y \in X \Longrightarrow x + y \in X$;

ii) $\forall \alpha \in K, \forall x \in X \Longrightarrow \alpha x \in X$.

Exemplul 1.3.1 *Orice spaţiu vectorial* (V, K) *are cel puţin două subspaţii* $\{0_V\}$ *şi* V *numite subspaţii vectoriale improprii ale lui* (V, K). *Orice alt subspaţiu vectorial se numeşte subspaţiu propriu.*

Exemplul 1.3.2 *Dacă* $\mathbb{K}^n$ *este spaţiul aritmetic n-dimensional definit în Exerciţiul 1.1.1 atunci*

$$E = \left\{ x = (x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)^T \middle| x \in \mathbb{K}^n \right\}$$

este un subspaţiu vectorial al lui $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$. *Într-adevăr, fie*

$$x = (x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)^T \text{ şi } y = (y_1, ..., y_{i-1}, 0, y_{i+1}, ..., y_n)^T$$

elemente arbitrare din E. *Observăm că*

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, ..., x_{i-1} + y_{i-1}, 0, x_{i+1} + y_{i+1}, ..., x_n + y_n)^T \in E \\ \alpha x &= (\alpha x_1, ..., \alpha x_{i-1}, 0, \alpha x_{i+1}, ..., \alpha x_n)^T \in E \ \forall \alpha \in K \end{aligned}$$

şi deci E *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathbb{K}^n$.

Remarcă 1.3.1 *Relaţiile i), ii) din Definiţia 1.3.1 sunt echivalente cu* $\forall \alpha, \beta \in K$ *şi* $\forall x, y \in X$ *rezultă* $\alpha x + \beta y \in X$.

Remarcă 1.3.2 *Un subspaţiu vectorial are o structură de spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse.*

1.4 Acoperire liniară a unei submulţimi. Combinaţie liniară de vectori

Definiţie 1.4.1 *Fie* (V, K) *spaţiu vectorial,* $A \subset V$ *nevidă şi* $x_1, ..., x_n \in V$.

i) Spunem că vectorul $x \in V$ *este o combinaţie liniară de vectorii* $x_1, ..., x_n$ *dacă există scalarii* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ *astfel încât* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

ii) Spunem că vectorul $x \in V$ *este o combinaţie liniară de vectori din* A, *dacă* $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, *şi vectorii* $x_i \in A$, $i = 1, ..., n$, *a.î.* $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

iii) Mulţimea $L_K(A) \overset{def}{=}$ *a tututror combinaţiilor liniare de vectori din* $A \subset V$ *se numeşte acoperire liniară a lui* A. *În particular, dacă* $A = \{x_1, ..., x_n\}$ *atunci*

$$L_K(A) \overset{def}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{K},\ i = 1, ..., n \right\}. \tag{1.4.1}$$

Propoziţie 1.4.1 *Dacă* $A \subset V$, $A \neq \phi$ *atunci* $L_K(A)$ *este subspaţiu vectorial al lui* V.

Remarcă 1.4.1 $L_K(A)$ *se numeşte şi subspaţiul vectorial generat de mulţimea* A *şi este cel mai mic subspaţiu vectorial ce conţine mulţimea* A. *În loc de* $L_K(A)$ *se mai folosesc notaţiile* $span_K(A)$, $span(A)$, $sp(A)$, $< A >$ *sau* $L(A)$.

1.5 Sistem de generatori

Fie (V, K) spaţiu vectorial.

Definiţie 1.5.1 *Spunem că sistemul* $X \subset V$ *este un sistem de generatori pentru* V, *dacă orice vector din* V *se scrie ca o combinaţie liniară de vectori din* X. *Cu alte cuvinte,* X *este un sistem de generatori pentru* V, *dacă* $V = L(X)$.

Remarcă 1.5.1 *Dacă* X *este un sistem de generatori pentru* V *şi* $X \subset Y \subset V$, *atunci* Y *este un sistem de generatori al lui* V.

Remarcă 1.5.2 *Dacă X este un sistem de generatori pentru V şi $x \in X$ este o combinaţie liniară cu vectori din X, atunci $X \setminus \{x\}$ este un sistem de generatori pentru V.*

Definiţie 1.5.2 *Se spune că un K-spaţiu vectorial V este de dimensiune finită, dacă conţine un sistem de generatori $\{x_1, ..., x_n\}$, în număr finit.*

Exemplul 1.5.1 *Spaţiul aritmetic n-dimensional $\mathbb{K}^n$ este de dimensiune finită, deoarece sistemul de vectori $\left\{e_1 = (1, ..., 0)^T, ..., e_n = (0, ..., 1)^T\right\}$ este sitem de generatori în $\mathbb{K}^n$.*

Exemplul 1.5.2 *Spaţiul vectorial al funcţiilor reale, definite pe segementul $[a, b]$ nu este de dimensiune finită, deoarece funcţiile*

$$f_0(t) = 1, f_1(t) = t, ..., f_n(t) = t^n, ...$$

realizează un sistem de generatori, cu $n \in \mathbb{N}$ arbitrar.

Sala: 2103	**Octombrie 2014**

CURS 2: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

2.1 Familie de vectori liniar independentă/dependentă

Fie (V, K) spaţiu vectorial şi I o mulţime de indici.

Definiţie 2.1.1 *O familie de vectori* $X = \{x_i\}_{i\in I} \subset V$ *se numeşte liniar independentă dacă pentru orice familie* $I_0 \subseteq I$ *finită*

$$\sum_{i\in I_0} \alpha_i x_i = 0_V \text{ dacă şi numai dacă } \alpha_i = 0 \ \forall i \in I_0.$$

Definiţie 2.1.2 *O familie de vectori* $X = \{x_i\}_{i\in I} \subset V$ *se numeşte liniar dependentă dacă există* $\alpha_i \in K$, $i \in I$ *nu toţi nuli astfel încât*

$$\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_V.$$

2.2 Operaţii cu familii de vectori

Propoziţie 2.2.1 *Intersecţia unei familii de subspaţii vectoriale ale unui spaţiu vectorial este un subspaţiu vectorial (echivalent: dacă* $\{S_i\}_{i\in I}$ *este o familie de subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial* (V, K) *atunci* $\bigcap_{i\in I} S_i$ *este un subspaţiu vectorial în* (V, K)*).*

Remarcă 2.2.1 *În general, reuniunea a două subspaţii vectoriale nu este neapărat un subspaţiu vectorial.*

Definiţie 2.2.1 *Se numeşte suma unei familii* $\{S_i\}_{i\in I}$ *de subspaţii vectoriale din spaţiul vectorial* (V, K)*, mulţimea*

$$\sum_{i\in I} S_i \overset{def}{=} \left\{ \sum_{i\in I} v_i \,\middle|\, v_i \in S_i, \text{ pentru orice } i \in I \right\}.$$

Remarcă 2.2.2 *Suma unei familii de subspaţii vectoriale este un subspaţiu vectorial.*

Remarcă 2.2.3 *Dacă* $\{S_i\}_{i\in I}$ *este o familie de subspaţii vectoriale din spaţiul vectorial* (V, K) *atunci*

$$\sum_{i\in I} S_i = span\left(\bigcup_{i\in I} S_i \right),$$

(echivalent: suma subspaţiilor coincide cu subspaţiul generat de reuniunea subspaţiilor).

2.3 Bază a unui spaţiu vectorial. Dimensiune

Definiţie 2.3.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial. Se numeşte bază a spaţiului vectorial V o familie de vectori B care îndeplineşte condiţiile de mai jos:*

i) *B este liniar independentă;*

ii) *B este sistem de generatori pentru spaţiul V.*

Exemplul 2.3.1 *Fie $e_1 = (1, 0, ..., 0)^T$, ..., $e_n = (0, ..., 1)^T$. Familia de vectori $B_c = \{e_1, ..., e_n\}$ este o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ numită baza canonică.*

Definiţie 2.3.2 *Familia de vectori $X \subset V$ este o familie liniar independentă maximală, dacă X este liniar independentă şi din faptul că $X \subset Y \subset V$ şi $X \neq Y$ rezultă că Y nu este liniar independentă.*

Definiţie 2.3.3 *Sistemul de vectori $X \subset V$ este un sistem minimal de generatori pentru V, dacă X este sistem de generatori pentru V şi din faptul că $Y \subset X$ şi $X \neq Y$ rezultă că Y nu este un sistem de generatori pentru V.*

În următorul rezultat sunt sugerate definiţii echivalente ale bazei:

Propoziţie 2.3.1 *Fie B o mulţime de vectori în (V, K). Sunt echivalente afirmaţiile:*

i) *B este liniar independentă şi maximală;*

ii) *B este sistem de generatori minimal;*

iii) *B este bază.*

Remarcă 2.3.1 *Dacă pentru o bază se ţine cont şi de ordinea vectorilor în bază, atunci în locul cuvântului bază se va folosi cuvântul reper.*

Teoremă 2.3.1 (Teorema de existenţă a bazei) *Fie (V, K) spaţiu vectorial. Daca familia finită $(x_i)_{i=\overline{1,n}}$ este sistem de generatori pentru V în care subfamilia $(x_i)_{i=\overline{1,r}}$, $r \leq n$, este liniar independentă, atunci există o bază B a lui V astfel încât*

$$\{x_1, ..., x_r\} \subseteq B \subseteq \{x_1, ..., x_r, ..., x_n\}.$$

Definiţie 2.3.4 *Numărul elementelor unei baze a spaţiului vectorial (V, K), de dimensiune finită, se numeşte dimensiunea spaţiului. În cazul când (V, K) nu este de dimensiune finită, se spune că (V, K) este infinit dimensional.*

Remarcă 2.3.2 *Dacă $G = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ este sistem de generatori în spaţiul vectorial finit dimensional $V \neq \{0_V\}$ peste corpul K atunci există o bază B a lui V conţinută în G.*

Teoremă 2.3.2 *Într-un spaţiu vectorial finit dimensional orice două baze au acelaşi număr de elemente.*

Definiţie 2.3.5 *Fie (V, K) spaţiu vectorial finit dimensional. Dimensiunea lui (V, K) este prin definiţie egală cu numărul de vectori dintr-o bază a acestuia. Pentru a pune în evidenţă dimensiunea spaţiului vectorial finit dimensional (V, K) se foloseşte notaţia $\dim_K V$. Evident $\dim_K \{0_V\} = 0$.*

Remarcă 2.3.3 *Conform Teoremei 2.3.2 $\dim_K V$ nu depinde de alegerea bazei.*

Lemă 2.3.1 (Lema de completare) *Într-un spaţiu vectorial de dimensiune finită orice familie de vectori liniar independentă poate fi extinsă la o bază.*

Teoremă 2.3.3 (Teorema de caracterizare a bazei) *Fie (V, K) spaţiu vectorial finit dimensional. O familie de vectori $B = \{x_1, ..., x_n\}$ este bază a lui V dacă şi numai dacă pentru orice $x \in V$ există şi sunt unici $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$.*

Demonstraţie. "$\subset$" Cum B este bază a lui V deducem că este şi sistem de generatori pentru V. Aşadar, pentru orice $x \in V$ există $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât

$$x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n. \tag{2.3.1}$$

Pe de altă parte dacă $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ nu ar fi unici ar exista $\beta_1, ..., \beta_n \in K$ astfel încât

$$x = \beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n. \tag{2.3.2}$$

Ar rezulta din relaţiile (2.3.1) şi (2.3.2) că

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n$$

sau echivalent

$$(\beta_1 - \alpha_1) x_1 + ... + (\beta_n - \alpha_n) x_n = 0_V \Longrightarrow \beta_1 = \alpha_1, ..., \beta_n = \alpha_n$$

unde am folosit faptul că $x_1, ..., x_n$ sunt liniar independente.

"$\supset$" Presupunem că pentru orice $x \in V$ există şi sunt unici $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$. Aceasta implică că B este sistem de generatori. Rămâne să demonstrăm că este şi liniar independent. Observăm că $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V$ putem scrie

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0_V = 0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_n.$$

Ţinând cont că scrierea lui 0_V este unică deducem că $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. ■

Remarcă 2.3.4 *Într-un spaţiu vectorial $n-$dimensional, un sistem format din n vectori liniar independenţi formează o bază.*

Remarcă 2.3.5 *Scalarii $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ din relaţia (2.3.1) se numesc coordonatele vectorului x în baza B, iar vectorul $x_B = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^T$ se numeşte vectorul coordonatelor lui x în baza B.*

2.4 Rangul unui sistem de vectori

Definiţie 2.4.1 *Dacă $M \subset V$ este un sistem de vectori din V, atunci rangul lui M este dimensiunea subspaţiului vectorial generat de M ($rangM = dimL(M)$).*

Teoremă 2.4.1 (Teorema rangului) *Pentru o matrice rangul sistemului de vectori linie este egal cu rangul sistemului de vectori coloană.*

Definiţie 2.4.2 *Rangul comun al sistemelor de vectori linii sau coloane a unei matrice se numeşte rangul ei.*

Remarcă 2.4.1 *Prin transformări elementare aplicate sistemului de vectori linie sau coloane, rangul unei matrice nu se modifică.*

Remarcă 2.4.2 *Prin transformări elementare asupra liniilor şi coloanelor, orice matrice A poate fi transformată într-o matrice B, având toate elementele nule cu excepţia primelor r elemente de pe diagonala principală, care să fie egale cu 1. Matricea A are atunci rangul r.*

Remarcă 2.4.3 *Familia de vectori $\{x_1, ..., x_n\}$ a spaţiului vectorial real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ este liniar independentă dacă şi numai dacă rangul matricei ce are pe coloane componentele vectorilor $x_1, ..., x_n$ are rangul n.*

Remarcă 2.4.4 *Familia de vectori $\{x_1, ..., x_n\}$ a spaţiului vectorial real $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ este liniar dependentă dacă şi numai dacă rangul matricei care are pe coloane (sau linii) componentele vectorilor $\{x_1, ..., x_n\}$ are rangul k mai mic decât n. Mai mult, orice subfamilie a acesteia care conţine vectori ce au componente într-un minor de ordinul k, nenul este liniar independentă. Numărul maxim de elemente al unei subfamilii liniar independente este egal cu rangul k al matricei.*

Sala: 2103	**Octombrie 2014**

CURS 3: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

3.1 Teorema schimbului a lui Steinitz

Teoremă 3.1.1 *Dacă* (V, K) *este spaţiu vectorial cu* $\dim_K V \in \mathbb{N}^*$, $I = \{v_1, ..., v_r\} \subset V$ *este sistem liniar independent iar* $G = \{u_1, ..., u_m\} \subset V$ *este sistem de generatori pentru* V *atunci există* $i_1, ..., i_{m-r} \in \{1, 2, ..., m\}$ *astfel încât* $\{v_1, ..., v_r,\ u_{i_1}, ..., u_{i_{m-r}}\}$ *este sistem de generatori pentru* V.

3.2 Metoda pivotului Gauss-Jordan. Lema substituţiei

Teoremă 3.2.1 (Lema substituţiei) *Fie* (V, K) *spaţiu vectorial cu* $\dim_K V = n \geq 1$, $B = \{a_1, ..., a_n\}$ *bază a lui* V *iar*

$$x = \xi_1 a_1 + ... + \xi_i a_i + ... + \xi_n a_n \quad \text{şi} \quad y = \eta_1 a_1 + ... + \eta_n a_n.$$

Are loc:

i) *Dacă* $F = \{a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n\}$ *este bază pentru* V *atunci* $\xi_i \neq 0$.

ii) *Dacă* $\xi_i \neq 0$ *atunci* $F = \{a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n\}$ *este bază pentru* V *şi avem*

$$y = \eta_1^* a_1 + ... + \eta_i^* x + ... + \eta_n^* a_n$$

unde $\eta_i^* = \frac{\eta_i}{\xi_i}$ *şi* $\eta_j^* = \eta_j - \frac{\eta_i}{\xi_i}\xi_j$, $j \neq i$, $j = \overline{1, n}$.

Demonstraţie. i) ”$\subset$” (Necesitatea). Fie F bază pentru V. Dacă prin absurd $\xi_i = 0$ atunci

$$x = \xi_1 a_1 + ... + \xi_i a_i + ... + \xi_n a_n \tag{3.2.1}$$

sau echivalent

$$\xi_1 a_1 + ... + \xi_i a_i + (-1)\, x + \xi_{i+1} a_{i+1} + ... + \xi_n a_n = 0_V$$

relaţie care arată că vectorii din F sunt liniar dependenţi. Ori, aceasta este o contradicţie cu F bază pentru V. Deci $\xi_i \neq 0$.

ii) ”$\supset$” (Suficienţa). Presupunem $\xi_i \neq 0$ şi fie combinaţia liniară

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_{i-1} a_{i-1} + \lambda_i x + ... + \lambda_n a_n = 0_V$$

sau folosind scrierea (3.2.1) echivalent cu

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_i \left(\xi_1 a_1 + ... + \xi_i a_i + ... + \xi_n a_n\right) + ... + \lambda_n a_n = 0_V$$

ce implică

$$\begin{cases} \lambda_i \xi_i = 0 \\ \lambda_j + \lambda_i \xi_j = 0,\ j \neq i \end{cases} \Longrightarrow \lambda_i = 0 \text{ şi respectiv } \lambda_j = 0$$

adică vectorii $a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n$ formează o bază în V (sunt liniar independenţi şi sunt în număr de $n = \dim_K V$). Coordonatele vectorului y în raport cu baza F se obţin astfel:

$$y = \eta_1^* a_1 + ... + \eta_i^* \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j + ... + \eta_n^* a_n = (\eta_1^* + \eta_i^* \xi_1) a_1 + ... + \eta_i^* \xi_i a_i + ... + (\eta_n^* + \eta_i^* \xi_n) a_n$$

adică

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \eta_1 = \eta_1^* + \eta_i^* \xi_1 & ... & \eta_1^* = \eta_1 - \frac{\eta_i}{\xi_i} \xi_1 \\ ... & & ... \\ \eta_i = \eta_i^* \xi_i & \Longrightarrow & \eta_i^* = \frac{\eta_i}{\xi_i} \\ ... & ... & ... \\ \eta_n = \eta_n^* + \eta_i^* \xi_n & & \eta_n^* = \eta_n - \frac{\eta_i}{\xi_i} \xi_n \end{array} \right\}$$

formule care determină noile coordonate ale vectorului $y \in V$ în raport cu baza F din V. ■

Remarcă 3.2.1 *Câteva din aplicaţiile lemei substituţiei sunt: rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare, calculul inversei unei matrice, determinarea rangului unei matrice, extragerea unei baze dintr-un sistem de generatori, determinarea coordonatelor unui vector într-o bază etc. În rezolvarea acestor probleme ea se reprezintă astfel*

$$\begin{array}{c|cc} B & x & y \\ \hline a_1 & \xi_1 & \eta_1 \\ ... & ... & ... \\ a_i & \xi_i \neq 0 & \eta_i \\ ... & ... & ... \\ a_n & \xi_n & \eta_n \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|cc} B & x & y \\ \hline a_1 & 0 & \eta_1^* = \frac{\xi_i \eta_1 - \eta_i \xi_1}{\xi_i} \\ ... & ... & ... \\ x & 1 & \eta_1^* = \frac{\eta_i}{\xi_i} \\ ... & ... & ... \\ a_n & 0 & \eta_n^* = \frac{\eta_n \xi_i - \eta_i \xi_n}{\xi_i} \end{array}$$

(numită şi metoda pivotului a lui Gauss-Jordan) ξ_i se numeşte pivot.

3.3 Matricea de trecere de la un reper la altul

Definiţie 3.3.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$ iar $E = \{a_1, ..., a_n\}$ şi $F = \{b_1, ..., b_n\}$ baze ale sale. Matricea ale cărei coloane sunt formate de coordonatele vectorilor bazei F în raport cu baza E se numeşte matricea de trecere de la baza E la baza F.*

Remarcă 3.3.1 *Dacă $b_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j$, $i = \overline{1, n}$ atunci matricea de trecere de la baza E la baza F este*

$$A_{E,F} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & ... & \alpha_{n1} \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{1n} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.3.1}$$

Teoremă 3.3.1 (Schimbarea bazei) *Fie (V, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$, $E = \{x_1, ..., x_n\}$ şi $F = \{y_1, ..., y_n\}$ baze ale sale. Dacă trecerea de la baza E la baza F se face prin matricea $A_{E,F}$ definită în (3.3.1) atunci trecerea de la coordonatele lui x în baza E la coordonatele lui x în baza F se face prin matricea $(A_{E,F})^{-1}$. Are loc formula*

$$x_F = (A_{E,F})^{-1} x_E.$$

Demonstraţie. Din E bază deducem că $\forall x \in V$, $\exists!\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$. Fie $y_i = \alpha_{i1} x_1 + ... + \alpha_{in} x_n$, $i = 1, ..., n$ şi $\beta_1, ..., \beta_n$ coordonatele lui x faţă de baza F, adică $x = \beta_1 y_1 + ... + \beta_n y_n$. Stabilim o legătură între coordonatele $\alpha_1, ..., \alpha_n$ şi $\beta_1, ..., \beta_n$. Avem

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1 y_1 + ... + \beta_n y_n = \beta_1 (\alpha_{11} x_1 + ... + \alpha_{1n} x_n) + ... + \beta_n (\alpha_{n1} x_1 + ... + \alpha_{nn} x_n) \\ &= (\beta_1 \alpha_{11} + ... + \beta_n \alpha_{n1}) x_1 + ... + (\beta_1 \alpha_{1n} + ... + \beta_n \alpha_{nn}) x_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{ji} \right) x_i. \end{aligned}$$

Cum reprezentarea vectorului x în baza B este unică deducem că

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{ji} \text{ pentru orice } i = 1, ..., n$$

ori în scrierea matriceală, relaţie echivalentă cu $x_E = A_{E,F} \cdot x_F$. Rezolvând ecuaţia matriceală în raport cu x_F, obţinem $x_F = (A_{E,F})^{-1} x_E$. ■

3.4 Definiţia izomorfismului de spaţii vectoriale. Spaţii vectoriale de tip finit izomorfe

Fie (U, K) şi (V, K) spaţii vectoriale.

Definiţie 3.4.1 *Aplicaţia $f : U \to V$ se numeşte morfism de spaţii vectoriale (sau: aplicaţie liniară, operator liniar, homomorfism de spaţii vectoriale ...) dacă*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{3.4.1}$$

pentru orice $x, y \in U$ şi orice $\alpha, \beta \in K$.

Remarcă 3.4.1 *Notăm prin $L_K(U, V)$ sau prin $Hom_K(U, V)$ mulţimea tuturor morfismelor $f : U \to V$. Dacă $U = V$ atunci f se numeşte endomorfism al lui U.*

Remarcă 3.4.2 *i) Compunerea a două (sau mai multe) aplicaţii liniare este tot o aplicaţie liniară.*

ii) Dacă $f : U \to V$ este un morfism de spaţii vectoriale atunci $f(0_U) = 0_V$.

Definiţie 3.4.2 *Fie $f : U \to V$ aplicaţie liniară. Spunem că*

i) f este injectivă dacă pentru orice $u_1, u_2 \in U$ următoarea implicaţie $f(u_1) = f(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2$ este adevărată.

ii) f este surjectivă dacă pentru orice $v \in V$ există $u \in U$ astfel încât $f(u) = v$.

iii) f este bijectivă dacă este injectivă şi surjectivă (echivalent: pentru orice $v \in V$ există şi este unic $u \in U$ astfel încât $f(u) = v$).

Definiţie 3.4.3 *Spaţiile vectoriale (U, K) şi (V, K) se numesc izomorfe, notăm $(U, K) \cong (V, K)$, dacă există un morfism bijectiv $f : U \to V$. Se mai spune că f este izomorfism sau transformare liniară nesingulară.*

3.5 Teoreme de izomorfism

Teoremă 3.5.1 (Teorema fundamentală de izomorfism) *Dacă (U, K) şi (V, K) sunt spaţii vectoriale cu $\dim_K U = \dim_K V \in \mathbb{N}^*$ atunci $(U, K) \cong (V, K)$.*

Demonstraţie. Presupunem că $\dim_K U = \dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$. Fie $\{v_1, ..., v_n\} \overset{bază}{\subset} (U, K)$ şi $\{w_1, ..., w_n\} \overset{bază}{\subset} (V, K)$. $\forall v \in U$, $\exists! a_1, ..., a_n \in K$ astfel încât

$$v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n.$$

Demonstrăm că aplicaţia $f : U \to V$ definită prin

$$f(a_1 v_1 + ... + a_n v_n) = a_1 w_1 + ... + a_n w_n$$

este liniară şi bijectivă. Într-adevăr, dacă $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n \in U$, $w = b_1v_1 + ... + b_nv_n \in V$ şi $a, b \in K$ sunt arbitrari atunci

$$\begin{aligned} f(av+bw) &= f\left((aa_1+bb_1)v_1 + ... + (aa_n+bb_n)v_n\right) \\ &= (aa_1+bb_1)w_1 + ... + (aa_n+bb_n)w_n \\ &= a(a_1w_1+...+a_nw_n) + b(b_1w_1+...+b_nw_n) = af(v)+bf(w) \end{aligned}$$

adică f este aplicaţie liniară. Pentru a proba că f este bijectivă este suficient să observăm că pentru orice $w \in V$, $\exists! a_1, ..., a_n \in K$ astfel încât $w = a_1w_1 + ... + a_nw_n$ şi deci $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ este unicul element din U astfel încât $f(v) = w$, adică f este bijectivă. ■

Remarcă 3.5.1 *Dacă $(V, \mathbb{R})$ este spaţiu vectorial real cu* $\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$ *atunci $(V, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Remarcă 3.5.2 *Dacă (U, K), (V, K) sunt spaţii vectoriale, $f : U \to V$ izomorfism iar B bază în U atunci $f(B)$ este bază în V.*

Teoremă 3.5.2 *Fie (U, K) şi (V, K) spaţii vectoriale. Dacă $f : U \to V$ este izomorfism de spaţii vectoriale atunci aplicaţia inversă $f^{-1} : V \to U$ este izomorfism de spaţii vectoriale.*

3.6 Spaţiul cât

Fie (V, K) spaţiu vectorial şi X subspaţiu vectorial al său. Definim o relaţie binară ρ astfel $\forall x, y \in V$ avem $x\rho y \Longleftrightarrow x - y \in X$. Remarcăm că ρ îndeplineşte proprietăţile

R1)	*reflexivitatea:*	$x\rho x$,	$\forall x \in V$;
R2)	*simetria:*	dacă $x\rho y$ atunci $y\rho x$,	$\forall x, y \in V$;
R3)	*tranzitivitatea:*	($x\rho y$ şi $y\rho z$) atunci $x\rho z$,	$\forall x, y, z \in V$,

adică ρ este o relaţie de echivalenţă (congruenţa modulo X), se notează "$\equiv$".

Definiţie 3.6.1 *Fie $x \in V$. Mulţimea $\widehat{x} = \{y \in V | \, y \equiv x \text{ (modulo } X)\} = \{y \in V | \, y - x \in X\}$ se numeşte clasa de echivalenţă asociată vectorului x în raport cu ρ sau clasa de echivalenţă a lui x în raport cu ρ.*

Remarcă 3.6.1 *Mulţimea*

$$V/X = \{\widehat{x} | \, x \in V\} \ \text{ notată şi } V/_{\equiv} \quad \begin{array}{l}\text{(numită spaţiul factor sau spaţiul cât al lui } V \\ \text{în raport cu relaţia de echivalenţă } \rho)\end{array}$$

a tuturor claselor de echivalenţă, admite o structură de spaţiu vectorial în raport cu următoarele operaţii

adunarea:	$\widehat{x} + \widehat{y} \overset{def}{=} \widehat{x+y}$ *pentru orice* $x, y \in V$
înmulţirea cu scalari:	$\alpha \cdot \widehat{x} \overset{def}{=} \widehat{\alpha \cdot x}$ *pentru orice* $x \in V$ *şi* $\alpha \in K$.

Remarcă 3.6.2 *Au loc:*

i) $\widehat{0} = X$. *Într-adevăr,*

$$\widehat{0} = \{y \in V | \, y \equiv 0\} = \{y \in V | \, y - 0 \in X\} = \{y \in V | \, y \in X\} = X.$$

ii) Dacă $X = \{0\}$ atunci spaţiul cât al lui $V/\{0\} = V$. Într-adevăr,

$$x \in V, \ \widehat{x} = \{y \in V | \, y - x \in \{0\}\} = \{y \in V | \, y - x = 0\} = \{x\}.$$

Teoremă 3.6.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial cu* $\dim_K V < \infty$ *şi X subspaţiu vectorial al său. Dacă $dim_K V = n$ şi $dim_K X = m$ atunci $dim_K (V/X) = n - m$.*

Sala: 2103	**Octombrie 2014**

CURS 4: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei — *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

Nota: *Acest curs nu a fost supus unui proces riguros de recenzare pentru a fi oficial publicat. El poate fi distribuit numai cu permisiunea autorului.*

4.1 Suma şi intersecţia a două subspaţii vectoriale

Amintim următorul rezultat:

Teoremă 4.1.1 *Dacă (V, K) este spaţiu vectorial iar V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci*

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \{v \in V |\, v \in V_1 \text{ şi } v \in V_2\} \\ V_1 + V_2 &= \{v_1 + v_2 |\, v_1 \in V_1 \text{ şi } v_2 \in V_2\} \\ &= \{v \in V |\, \exists v_1 \in V_1 \text{ şi } \exists v_2 \in V_2 \text{ astfel încât } v = v_1 + v_2\} \end{aligned}$$

sunt subspaţii vectoriale ale lui V.

Remarcă 4.1.1 *$V_1 \cap V_2$ este numit subspaţiul vectorial intersecţie iar $V_1 + V_2$ este numit subspaţiul vectorial sumă.*

4.2 Teorema lui Hermann Günther Grassmann (1809–1877)

Teoremă 4.2.1 *Dacă (V, K) este spaţiu vectorial cu $\dim_K V \in \mathbb{N}^*$ iar V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci*

$$\dim_K (V_1 + V_2) - \dim_K V_2 = \dim_K V_1 - \dim_K (V_1 \cap V_2).$$

Demonstraţie. Fie $B_{V_1 \cap V_2} = \{v_1, ..., v_m\}$ bază în $V_1 \cap V_2$. Dacă extindem această bază la

$$B_{V_1} = \{v_1, ..., v_m, u_{m+1}, ..., u_r\} \overset{bază}{\subset} V_1 \text{ şi } B_{V_2} = \{v_1, ..., v_m, w_{m+1}, ..., w_s\} \overset{bază}{\subset} V_2$$

atunci

$$S = \{v_1, ..., v_m, u_{m+1}, ..., u_r, w_{m+1}, ..., w_s\}$$

este sistem de generatori pentru $V_1 + V_2$. Arătăm că S este liniar independent. Realizăm o combinaţie liniară, egală cu vectorul nul

$$0_V = \Sigma_{i=1}^m a_i v_i + \Sigma_{j=m+1}^r b_j u_j + \Sigma_{k=r+1}^s c_k w_k.$$

Rezultă că v definit prin

$$v = \underbrace{\Sigma_{i=1}^m a_i v_i + \Sigma_{j=m+1}^r b_j u_j}_{\in V_1} = \underbrace{-\Sigma_{k=r+1}^s c_k w_k}_{\in V_2}$$

este un vector din $V_1 \cap V_2$ şi $b_j = 0$ $(j = m+1, ..., r)$ deoarece B_{V_1} este liniar independent. Mai mult

$$0_V = \Sigma_{i=1}^m a_i v_i + \Sigma_{k=r+1}^s c_k w_k$$

iar deoarece B_{V2} este liniar independent deducem că $a_i = c_k = 0$. Aşadar

$$\dim_K (V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K (V_1 \cap V_2).$$

■

4.3 Sumă directă de subspaţii vectoriale

Definiţie 4.3.1 *Fie (V,K) spaţiu vectorial. Spunem că suma V_1+V_2 a subspaţiilor vectoriale V_1, V_2 din spaţiul vectorial V este directă, dacă oricare ar fi $v \in V_1+V_2$ există $v_1 \in V_1$ şi $v_2 \in V_2$ unici, astfel încât $v = v_1+v_2$. Notăm această situaţie prin $V_1 \oplus V_2$. Aşadar*

$$V_1 \oplus V_2 = \{ v \in V \,|\, \exists! v_1 \in V_1 \text{ şi } \exists! v_2 \in V_2 \text{ astfel încât } v = v_1+v_2 \}.$$

Teoremă 4.3.1 *Fie (V,K) spaţiu vectorial. Dacă V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci suma V_1+V_2 este directă dacă şi numai dacă $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.*

Demonstraţie. "$\subset$" Presupunem $v \in V_1 \cap V_2$. Atunci

$$v = \underset{\in V_1}{v} + 0_V = 0_V + \underset{\in V_2}{v}$$

iar ţinând cont că scrierea lui v este unică, deducem că $v = 0_V$.

"$\supset$" Dacă $v_1+v_2 = v_1'+v_2'$ pentru $v_1, v_2 \in V_1$ iar $v_1', v_2' \in V_2$ atunci $\underbrace{v_1 - v_1'}_{\in V_1} = \underbrace{v_2' - v_2}_{\in V_2}$. Aşadar

$$\underset{\text{deoarece } v_1 - v_1' \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\}}{v_1 = v_1'} \quad \text{şi} \quad \underset{\text{deoarece } v_2 - v_2' \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\}}{v_2 = v_2'}$$

adică reprezentarea ca sumă este unică. ■

Remarcă 4.3.1 *Dacă (V,K) este spaţiu vectorial cu $\dim_K V \in \mathbb{N}^*$ iar V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V astfel încât suma V_1+V_2 este directă, atunci*

$$\dim_K (V_1+V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2.$$

Demonstraţie. Deoarece $\dim_K (V_1 \cap V_2) = 0$ rezultatul este o consecinţă a Teoremei 4.2.1. ■

4.4 Teorema de caracterizare a sumei directe

Definiţie 4.4.1 *Fie V_1, V_2, ... , V_m subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial de tip finit (V,K). Spunem că V este sumă directă de V_1, V_2, ... , V_m şi scriem $V = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i$ sau $V = V_1 \oplus ... \oplus V_m$ dacă orice vector din V se scrie în mod unic ca o sumă de vectori din V_1, V_2, ... , V_m. În această situaţie se mai spune că subspaţiile vectoriale V_1, V_2, ... , V_m sunt suplimentare.*

Dăm următoarea caracterizare a sumei directe.

Teoremă 4.4.1 *Fie (V,K) spaţiu vectorial de dimensiune finită. Următoarele sunt echivalente*

i) $V = \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} V_i$.

ii) $V = V_1 + ... + V_m = \Sigma_{i=1}^m V_i$ *şi* $V_i \cap \left(\Sigma_{j=1, j\neq i}^m V_j\right) = \{0_V\}$ $\forall i = 1, ..., m$.

iii) $V = \Sigma_{i=1}^m V_i$ *şi* $\dim_K V = \dim_K V_1 + ... + \dim_K V_m = \Sigma_{i=1}^m \dim_K V_i$.

4.5 Teorema de existenţă a suplimentului

Teoremă 4.5.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K V = n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $X \subset V$ este subspaţiu vectorial în V atunci există $Y \subset V$ subspaţiu vectorial astfel încât $V = X \oplus Y$.*

Demonstraţie. Fie $p = \dim_K X \leq n$ şi $B_X = \{b_1, ..., b_p\}$ o bază a lui X. Cum $\dim_K V = n$ putem completa B_X până la o bază B_V a lui V, astfel

$$B_V = \{b_1, ..., b_p, g_1, ..., g_{n-p}\}.$$

Demonstrăm că $Y = Span\{g_1, ..., g_{n-p}\}$ are proprietatea că $V = X \oplus Y$. Evident

$$X + Y \subset V. \tag{4.5.1}$$

Pe de altă parte

$$\forall v \in V,\, v = \underbrace{\Sigma_{i=1}^{p} \alpha_i b_i}_{x \in X} + \underbrace{\Sigma_{i=1}^{n-p} \beta_i g_i}_{y \in Y} = x + y \in X + Y \Longrightarrow V \subset X + Y. \tag{4.5.2}$$

Relaţiile (4.5.1) şi (4.5.2) implică

$$V = X + Y. \tag{4.5.3}$$

Mai mult, observăm că

$$\dim_K X + \dim_K Y = p + (n - p) = n = \dim_K V = n. \tag{4.5.4}$$

În final (4.5.3) şi (4.5.4) arată că este aplicabil punctul iii) al Teoremei 4.5.1 şi deci $V = X \oplus Y$. ■

4.6 Exemple de operatori liniari

Exemplul 4.6.1 *Fie (V, K) spaţiu vectorial.*

1) Aplicaţia $1_V : V \to V$ definită prin $1_V(x) = x$ pentru orice $x \in V$ este un operator liniar, numit operatorul identic.

2) Dacă V_1, V_2 sunt subspaţii vectoriale în V atunci aplicaţia $O : V_1 \to V_2$ definită prin $O(x) = 0_{V_2}$ pentru orice $x \in V_1$ este un operator liniar, numit operatorul nul.

3) Notăm cu $C^1_{[a,b]}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile pe $[a, b]$ cu derivata continuă. Aplicaţia

$$D : C^1_{[a,b]} \to C^0_{[a,b]},\ D(f) = f'$$

este un operator liniar numit operator de derivare.

4) Notăm cu $C^0_{[a,b]}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f(\cdot) : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$. Aplicaţia

$$I : C^0_{[a,b]} \to C^1_{[a,b]},\ I(f) = \int_a^x f(t)\, dt,\ x \in [a, b]$$

este un operator liniar numit operatorul de integrare.

4.7 Proprietăţi ale operatorilor liniari

Teoremă 4.7.1 *Fie (V_1, K) şi (V_2, K) spaţii vectoriale iar $f : V_1 \to V_2$ operator liniar. Următoarele au loc*

i) $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$.

ii) $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in V_1$.

iii) $f\left(\Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)$, $\alpha_i \in K$, $x_i \in V_1$ *cu* $i = 1, ..., m$.

iv) *Dacă* X *este subspaţiu vectorial în* V_1 *atunci* $f(X)$ *este subspaţiu vectorial în* V_2.

4.8 Operaţii cu operatori liniari. Operator invers

Teoremă 4.8.1 *Fie* (V_1, K) *şi* (V_2, K) *spaţii vectoriale. Dacă pe mulţimea* $L_K(V_1, V_2)$ *considerăm operaţiile*

$$\begin{array}{ll} i) & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ ii) & (\alpha f)\, x = \alpha f(x) \end{array}$$

unde $f(x), g(x) \in L_K(V_1, V_2)$ *iar* $\alpha \in K$, *atunci* $(L_K(V_1, V_2), K)$ *are o structură de spaţiu vectorial în raport cu operaţiile definite.*

Definiţie 4.8.1 *Fie* (V_1, K), (V_2, K) *şi* (V_3, K) *spaţii vectoriale. Dacă* $f : V_1 \to V_2$ *şi* $g : V_2 \to V_3$ *sunt operatori liniari atunci aplicaţia*

$$(g \circ f)(\cdot) : V_1 \to V_3 \text{ definită prin } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru } x \in V_1$$

se numeşte produsul (sau compunerea) operatorilor liniari f, g.

Remarcă 4.8.1 *Fie* (V_1, K), (V_2, K) *şi* (V_3, K) *spaţii vectoriale. Dacă* $f : V_1 \to V_2$ *şi* $g : V_2 \to V_1$ *sunt operatori liniari atunci* $(g \circ f)(\cdot) : V_1 \to V_3$ *este operator liniar.*

Definiţie 4.8.2 *Fie* (V_1, K) *şi* (V_2, K) *spaţii vectoriale. Operatorul liniar* $f : V_1 \to V_2$ *se numeşte inversabil dacă există un operator* $g : V_2 \to V_1$ *astfel încât* $(g \circ f)(x) = x\ \forall x \in V_1$ *şi* $(f \circ g)(y) = y\ \forall y \in V_2$. *Dacă există* g *îndeplinind aceste condiţii atunci se notează cu* f^{-1} *şi se numeşte inversul operatorului liniar* f.

Teoremă 4.8.2 *Fie* (V_1, K) *şi* (V_2, K) *spaţii vectoriale. Operatorul liniar* $f : V_1 \to V_2$ *este inversabil dacă şi numai dacă este bijectiv.*

Sala: 2103	**Octombrie 2014**

CURS 5: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei — *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

Nota: *Acest curs nu a fost supus unui proces riguros de recenzare pentru a fi oficial publicat. El poate fi distribuit numai cu permisiunea autorului.*

5.1 Nucleul şi imaginea unui operator liniar. Rangul unui operator liniar şi defectul lui

Definiţie 5.1.1 *Fie (X,K) şi (Y,K) spaţii vectoriale şi $U : X \to Y$ operator liniar.*

i) Mulţimea

$$Ker\ U = \{x \in X |\, U(x) = 0_Y\}$$

se numeşte nucleul operatorului U iar $\dim_K KerU$ se numeşte defectul lui U.

ii) Mulţimea

$$ImU = \{y \in Y |\, \exists x \in X \text{ astfel încât } U(x) = y\}$$

se numeşte imaginea operatorului U iar $\dim_K ImU$ se numeşte rangul lui U.

Remarcă 5.1.1 *Sunt adevărate:*

i) $Ker\ U$ este subspaţiu vectorial în (X,K) iar ImU în (Y,K).

ii) Dacă $Ker\ U = \{0_X\}$ atunci operatorul liniar U este injectiv, şi reciproc. Se mai spune că U este monomorfism.

iii) Dacă $Im\ U = Y$ atunci operatorul liniar U este surjectiv. Se mai spune că U este epimorfism.

Teoremă 5.1.1 (Teorema fundamentală de izomorfism II) *Dacă (X,K), (Y,K) sunt spaţii vectoriale iar $U : X \to Y$ este operator liniar atunci există un izomorfism $g : X/KerU \to ImU$.*

5.2 Teorema dimensiunii pentru operatori liniari

Teoremă 5.2.1 *Dacă (X,K), (Y,K) sunt spaţii vectoriale finit dimensionale nenule iar $U : X \to Y$ este operator liniar atunci*

$$\dim_K X = \dim_K KerU + \dim_K ImU.$$

Demonstraţie. Fie

$$\{v_1, ..., v_d\} \overset{\textit{bază}}{\subset} KerU \text{ iar } \{v_1, ..., v_d, v_{d+1}, ..., v_n\} \overset{\text{baza extinsă}}{\subset} X.$$

Arătăm că $\{U(v_{d+1}), ..., U(v_n)\} \overset{\text{bază}}{\subset} ImU$. Remarcăm că pentru $w \in ImU$ există $v \in X$ astfel încât $U(v) = w$. Demonstrăm că $\{U(v_{d+1}), ..., U(v_n)\}$ este sistem de generatori în ImU. Într-adevăr, din

$$\{v_1, ..., v_d, v_{d+1}, ..., v_n\} \overset{\text{bază}}{\subset} X$$

deducem că există α_1,...,$\alpha_n \in K$ astfel încât

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_d v_d + \alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n.$$

Aplicând U avem

$$\begin{aligned} U(v) &= U(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_d v_d + \alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 \underbrace{U(v_1)}_{=0_Y \text{ deoarece } v_1 \in KerU} + ... + \alpha_d \underbrace{U(v_d)}_{=0_Y \text{ deoarece } v_d \in KerU} + \alpha_{d+1} U(v_{d+1}) + ... + \alpha_n U(v_n) \\ &= \alpha_{d+1} U(v_{d+1}) ... + \alpha_n U(v_n) \end{aligned}$$

şi deci $\{U(v_{d+1}), ..., U(v_n)\} \subseteq Span(ImU)$.

Demonstrăm că $\{U(v_{d+1}), ..., U(v_n)\}$ este liniar independent în ImU :

$$\alpha_{d+1} U(v_{d+1}) + ... + \alpha_n U(v_n) = 0_Y \Longrightarrow U(\alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n) = 0_Y$$

şi deci $\alpha_{d+1} v_{d+1} ... + \alpha_n v_n \in KerU$. Dar $\{v_1, ..., v_d\} \overset{bază}{\subset} KerU \Longrightarrow$ există $\beta_1, ..., \beta_d \in K$ astfel încât

$$\alpha_{d+1} v_{d+1} + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_d v_d \text{ echivalent } \beta_1 v_1 + ... + \beta_d v_d - \alpha_{d+1} v_{d+1} - ... - \alpha_n v_n = 0_Y.$$

Cum $\{v_1, ..., v_d, v_{d+1}, ..., v_n\} \overset{\text{bază}}{\subset} X$ deducem că

$$\beta_1 = ... = \beta_d = -\alpha_{d+1} = ... = -\alpha_n = 0$$

şi deci $\{U(v_{d+1}), ..., U(v_n)\}$ este liniar independent în ImU.

Notă: 1) dacă $d = n \Longrightarrow KerU = X$ iar din **Teorema fundamentală de izomorfism II** avem că

$$X/KerU = \{0_X\} \text{ izomorf cu } ImU \Longrightarrow \dim_K ImU = \dim_K \{0_X\} = 0.$$

2) dacă $d = 0 \Longrightarrow KerU = \{0_X\}$ iar din **Teorema fundamentală de izomorfism II** avem că

$$X/\{0_X\} = X \text{ izomorf cu } ImU \Longrightarrow \dim_K ImU = \dim_K X = n.$$

■

5.3 Reprezentarea matriceală a operatorilor liniari definiţi pe spaţii vectoriale de tip finit

Definiţie 5.3.1 *Fie (X, K), (Y, K) spaţii vectoriale de dimensiune finită $n \in \mathbb{N}^*$, respectiv $m \in \mathbb{N}^*$, $U : X \to Y$ operator liniar, $E = \{x_1, ..., x_n\} \overset{reper}{\subset} X$ iar $F = \{y_1, ..., y_m\} \overset{reper}{\subset} Y$. Matricea ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor $U(x_1), ..., U(x_n)$ în raport cu reperul F se numeşte matricea lui U în raport cu reperele E şi F.*

Remarcă 5.3.1 *Dacă*

$$\begin{aligned} U(x_1) &= \alpha_{11} y_1 + ... + \alpha_{m1} y_m \\ &... \\ U(x_n) &= \alpha_{1n} y_1 + ... + \alpha_{mn} y_m \end{aligned}$$

atunci matricea lui U în raport cu reperele E şi F este

$$[A]_{E,F}^U = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,..n \\ j=1,...,m}} = \begin{pmatrix} & ... & \\ \uparrow & & \uparrow \\ [U(x_1)]_F & ... & [U(x_n)]_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ & ... & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & ... & \alpha_{1n} \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{m1} & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad (\overset{not}{=} A).$$

În plus, are loc $(U(x))_F = [A]_{E,F}^U \cdot x_E$ unde x_E este vectorul coordonatelor elementului $x \in X$ în raport cu reperul E.

Remarcă 5.3.2 *Fie* (X,K), (Y,K) *spaţii vectoriale finit dimensionale nenule şi* $U : X \to Y$ *operator liniar. Dacă* $E \overset{\text{reper canonic}}{\subset} (X,K)$, $F \overset{\text{reper canonic}}{\subset} (Y,K)$ *iar* $[A]_{E,F}^{U}$ *este matricea lui* U *corespunzătoare reperelor canonice* E, F *atunci* U *admite următoarea reprezentare* $U(x) = [A]_{E,F}^{U} \cdot x$.

Definiţie 5.3.2 *Fie* (X,K) *spaţiu vectorial de dimensiune finită* $n \in \mathbb{N}^*$ *iar* $U : X \to X$ *endomorfism. Dacă* $E = \{x_1, ..., x_n\} \overset{\text{bază}}{\subset} X$ *iar* $U(x_i) = \alpha_{1i}x_1 + ... + \alpha_{ni}x_n$ *pentru orice* $i = 1, ..., n$ *atunci*

$$[A]_E^U = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} & ... & \\ \uparrow & & \uparrow \\ [U(x_1)]_E & ... & [U(x_n)]_E \\ \downarrow & & \downarrow \\ & ... & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & ... & \alpha_{1n} \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \ (\overset{not}{=} A\ ),$$

se numeşte matricea endomorfismului U *în raport cu reperul* E.

Exerciţiul 5.3.1 *Fie* $\mathcal{P}_2[X]$ *spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult* 2 *şi operatorul liniar* $U : \mathcal{P}_2[X] \to \mathcal{P}_2[X]$ *definit prin* $U(f(x)) = f'(x) + f''(x)$. *Să se determine matricea endomorfismului* U *în raport cu reperul canonic* $B_c = \{1, x, x^2\}$ *din* $\mathcal{P}_2[X]$.

Demonstraţie. Metoda I. Observăm că

$$\begin{aligned} U(1) &= (1)' + (1)'' = 0 \\ U(x) &= (x)' + (x)'' = 1 \\ U(x^2) &= (x^2)' + (x^2)'' = 2x + 2 \end{aligned}$$

iar, conform teoriei

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_{11} \cdot 1 + \alpha_{21}x + \alpha_{31}x^2 \\ 1 &= \alpha_{12} \cdot 1 + \alpha_{22}x + \alpha_{32}x^2 \\ 2x + 2 &= \alpha_{13} \cdot 1 + \alpha_{23}x + \alpha_{33}x^2 \end{aligned}$$

sistem din care, prin identificarea coeficienţilor polinoamelor, obţinem matricea operatorului U

$$[A]_{B_c}^U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Metoda II. Deoarece $\mathcal{P}_2[X] \overset{\text{izomorf}}{\simeq} \mathbb{R}^3$ deducem că U este operator liniar de la $\mathbb{R}^3$ la $\mathbb{R}^3$, dat de o matrice A de tip 3×3. Vom determina $[A]_{B_c}^U$. Dacă $f(x) = a + bx + cx^2$ atunci putem scrie operatorul U astfel

$$U(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2)' + (a + bx + cx^2)'' = (b + 2cx) + 2c = (b + 2c) + 2cx.$$

Vom scrie $f(x) = a + bx + cx^2$ şi $U(f(x)) = (b + 2c) + 2cx$ în coordonate în raport cu reperul canonic $B_c = \{1, x, x^2\}$ din $\mathcal{P}_2[X]$:

$$\begin{array}{ccc} f(x) = a + bx + cx^2 & \overset{U}{\to} & U(f(x)) = (b + 2c) + 2cx \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (f(x))_{B_C} = (a, b, c)^T & \to & (U(f(x)))_{B_c} = ((b + 2c), 2c, 0)^T. \end{array}$$

Scriem coordonatele operatorului U astfel

$$(U(f(x)))_{B_c} = \begin{pmatrix} b + 2c \\ 2c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (f(x))_{B_C}.$$

Matricea

$$[A]_{B_c}^U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului U. ■

5.4 Legătura dintre operaţiile cu operatori liniari şi operaţiile cu matricele corespunzătoare lor

Teoremă 5.4.1 *Fie (X, K), (Y, K), (Z, K) spaţii vectoriale de dimensiune finită nenule. Presupunem că $E \overset{reper}{\subset} X$, $F \overset{reper}{\subset} Y$, $G \overset{reper}{\subset} Z$, $U_1 : X \to Y$, $U_2 : X \to Y$ şi $U_3 : Y \to Z$ operatori liniari. Dacă $[A_1]_{E,F}^{U_1}$ este matricea lui U_1 în raport cu reperele E şi F (respectiv $[A_2]_{E,F}^{U_2}$ a lui U_2 în raport cu reperele E şi F) iar $[A_3]_{F,G}^{U_3}$ matricea lui U_3 în raport cu reperele F şi G atunci*

i) *operatorului liniar $U_1 + U_2$ îi corespunde matricea $[A]_{E,F}^{U_1+U_2} = [A_1]_{E,F}^{U_1} + [A_2]_{E,F}^{U_2}$;*

ii) *operatorului liniar αU_1 $(\alpha \in K)$ îi corespunde matricea $[A]_{E,F}^{\alpha U_1} = \alpha \cdot [A_1]_{E,F}^{U_1}$;*

iii) *operatorului liniar $U_3 \circ U_1$ îi corespunde matricea $[A]_{E,G}^{U_3 \circ U_1} = [A_1]_{E,F}^{U_1} \cdot [A_3]_{F,G}^{U_3}$;*

iv) *sub ipoteza că U_1 este inversabilă operatorului liniar U_1^{-1} îi corespunde matricea $[A]_{F,E}^{U_1^{-1}} = \left([A_1]_{E,F}^{U_1}\right)^{-1}$.*

5.5 Modificarea matricei unui operator liniar la schimbarea reperelor

Teoremă 5.5.1 *Fie (X, K), (Y, K) spaţii vectoriale de dimensiune finită nenule şi $U : X \to Y$ operator liniar. Dacă $[A]_{E_1,F_1}^{U}$ este matricea lui U în raport cu reperele $E_1 \subset X$, $F_1 \subset Y$ iar $[B]_{E_2,F_2}^{U}$ este matricea lui U în raport cu reperele $E_2 \subset X$, $F_2 \subset Y$ atunci*

$$[B]_{E_2,F_2}^{U} = (D_{F_1,F_2})^{-1} \cdot [A]_{E_1,F_1}^{U} \cdot C_{E_1,E_2}$$

unde C_{E_1,E_2} este matricea de trecere de la reperul E_1 la E_2 iar D_{F_1,F_2} este matricea de trecere de la reperul F_1 la F_2.

Remarcă 5.5.1 *Fie (X, K) spaţiu vectorial de dimensiune finită nenul şi $U : X \to X$ endomorfism. Dacă $[A]_E^U$ este matricea lui U în raport cu reperul E al lui X, iar $[B]_F^U$ este matricea lui U în raport cu reperul $F \subset X$ atunci*

$$[B]_F^U = (C_{E,F})^{-1} \cdot [A]_E^U \cdot C_{E,F}$$

unde $C_{E,F}$ este matricea de trecere de la reperul E la reperul F.

Exemplul 5.5.1 *Fie $\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ spaţiu vectorial şi $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit prin $U(x, y) = (x + y, -2x + 4y)$. Dacă*

$$[A]_{B_c}^U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ atunci să se arate că } [B]_B^U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

unde $B_c = \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\} \overset{reper\ canonic}{\subset} \mathbb{R}^2$, $B = \left\{(1,1)^T, (1,2)^T\right\} \overset{reper}{\subset} \mathbb{R}^2$.

Demonstraţie. Observăm că

$$C_{B_c,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1_{\;B_c} & 2_{\;B_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi deci } (C_{B_c,B})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$[B]_B^U = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

∎

Sala: 2103	**Noiembrie 2014**

CURS 6: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei — *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

Nota: *Acest curs nu a fost supus unui proces riguros de recenzare pentru a fi oficial publicat. El poate fi distribuit numai cu permisiunea autorului.*

6.1 Valori proprii şi vectori proprii ai unui operator liniar care este endomorfism. Subspaţii proprii. Dimensiunea algebrică şi geometrică a unei valori proprii

Fie (X, K) spaţiu vectorial nenul şi $U : X \to X$ endomorfism.

Definiţie 6.1.1 *Vectorul $x \in X$, $x \neq 0_X$ se numeşte vector propriu al lui U dacă există $\lambda \in K$ astfel încât*

$$U(x) = \lambda x. \tag{6.1.1}$$

Definiţie 6.1.2 *Un scalar $\lambda \in K$ se numeşte valoare proprie a lui U dacă există $x \in X$, $x \neq 0_X$ ce verifică (6.1.1).*

Definiţie 6.1.3 *Fie λ valoare proprie a lui U. Mulţimea $X_\lambda = \{x \in X | U(x) = \lambda x\}$ se numeşte subspaţiul propriu al lui U corespunzător valorii proprii λ. (Notăm că în X_λ este inclus şi 0_X.)*

Remarcă 6.1.1 $X_\lambda = Ker(U - \lambda 1_X)$ *este subspaţiu vectorial în X.*

Definiţie 6.1.4 *Mulţimea tuturor valorilor proprii se notează prin ΛU şi se numeşte spectrul operatorului U. Numărul $R_s = \max\{|\lambda| | \lambda \in \Lambda U\}$ se numeşte raza spectrală a operatorului U.*

Remarcă 6.1.2 *Dacă $\dim_K X = n \in N^*$ iar $A \overset{not}{=} [A]_B^U$ este matricea lui U în raport cu reperul $B \subset X$ atunci $\lambda \in K$ este valoare proprie pentru U (se mai spune pentru A) dacă şi numai dacă*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \tag{6.1.2}$$

În plus, vectorul propriu x corespunzător valorii proprii λ se determină din sistemul

$$(A - \lambda I_n) x_B = 0_X. \tag{6.1.3}$$

Definiţie 6.1.5 *Dimensiunea subspaţiului propriu X_λ peste K se numeşte multiplicitatea geometrică a valorii proprii λ. Se notează $\dim_K X_\lambda$ prin m_{g_λ}.*

Definiţie 6.1.6 *Multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ este multiplicitatea lui λ ca rădăcină a ecuaţiei (6.1.2). Notăm prin m_{a_λ} multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ.*

Remarcă 6.1.3 *Dacă $\dim_K X = n \in N^*$ iar $\lambda \in K$ este o valoare proprie a endomorfismului U atunci $m_{g_\lambda} \leq m_{a_\lambda}$.*

6.2 Polinoame de endomorfisme sau de matrice pătratice. Polinom caracteristic al unui endomorfism sau al unei matrice pătratice. Teorema Hamilton-Cayley. Consecinţe

Fie (X, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X = n \in N^*$, $U : X \to X$ endomorfism iar $A \overset{not}{=} [A]_B^U$ matricea lui U în raport cu reperul $B \subset X$.

Definiţie 6.2.1 *Polinomul*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n,\ p_i \in K \ \text{cu}\ i = 0, ..., n$$

ce intervine în (6.1.2) se numeşte polinomul caracteristic al endomorfismului U iar ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ ce-i corespunde lui $P_A(\lambda)$, se numeşte ecuaţia caracteristică a lui U.

Invarianţa polinomului caracteristic la schimbarea reperelor este redată în:

Teoremă 6.2.1 *Prin schimbarea reperului în spaţiul vectorial (X, K), polinomul caracteristic al operatorului liniar U nu se modifică.*

Demonstraţie. Fie $E, F \overset{reper}{\subset} X$. Notăm $A = [A]_E^U$, $B = [B]_F^U$ iar prin $C = [C]_{E,F}$ matricea de legătură între reperele E, F. Observăm că

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I_n| = \left|C^{-1}AC - \lambda I_n\right| = \left|C^{-1}(A - \lambda I_n)C\right| = |(A - \lambda I_n)| = P_A(\lambda),$$

şi deci polinomul caracteristic nu depinde de alegerea reperului. ■

Teoremă 6.2.2 (Teorema Hamilton-Cayley) *Fie $\mathcal{M}_n(K)$ spaţiul vectorial al matricelor de tip $n \times n$. Dacă $B \overset{reper}{\subset} X$, $U : X \to X$ este endomorfism iar $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este matricea lui U în reperul B atunci $P_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(K)}$.*

Demonstraţie. Observăm că

$$(A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^* = |A - \lambda I_n| I_n \ \text{pentru}\ \lambda \notin \Lambda U \tag{6.2.1}$$

unde

$$(A - \lambda I_n)^* = \begin{pmatrix} \beta_{11}^0 + \beta_{11}^{(1)}\lambda + ... + \beta_{11}^{(n-1)}\lambda^{n-1} & ... & \beta_{1n}^0 + \beta_{1n}^{(1)}\lambda + ... + \beta_{1n}^{(n-1)}\lambda^{n-1} \\ ... & ... & ... \\ \beta_{n1}^0 + \beta_{n1}^{(1)}\lambda + ... + \beta_{n1}^{(n-1)}\lambda^{n-1} & ... & \beta_{nn}^0 + \beta_{nn}^{(1)}\lambda + ... + \beta_{nn}^{(n-1)}\lambda^{n-1} \end{pmatrix} \tag{6.2.2}$$

este matricea adjunctă a lui $A - \lambda I_n$. Notaţiile introduse sunt reprezentate de

$$\beta_{11}^0 + \beta_{11}^{(1)}\lambda + ... + \beta_{11}^{(n-1)}\lambda^{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} - \lambda & ... & \alpha_{n2} \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{2n} & ... & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} ...$$

Descompunând (6.2.2) în sume de n matrice avem

$$(A - \lambda I_n)^* = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11}^0 & ... & \beta_{1n}^0 \\ ... & ... & .. \\ \beta_{n1}^0 & ... & \beta_{nn}^0 \end{pmatrix}}_{\overset{not}{=} B_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11}^{(1)} & ... & \beta_{1n}^{(1)} \\ ... & ... & .. \\ \beta_{n1}^{(1)} & ... & \beta_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}}_{\overset{not}{=} B_1}\lambda + ... + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11}^{(n-1)} & ... & \beta_{1n}^{(n-1)} \\ ... & ... & ... \\ \beta_{n1}^{(n-1)} & ... & \beta_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\overset{not}{=} B_{n-1}}\lambda^{n-1}$$

$$= \quad B_0 + B_1\lambda + ... + B_{n-1}\lambda^{n-1}.$$

Egalitatea (6.2.1) devine

$$(A - \lambda I_n)\left(B_0\lambda + B_1\lambda^2 + ... + B_{n-1}\lambda^{n-1}\right) = \left(p_0\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n\right) I_n.$$

Efectuând produsul în membrul întâi şi identificând coeficienţii polinoamelor, obţinem

$$\begin{aligned} -B_{n-1} &= p_0 I_n \\ AB_{n-1} - I_n B_{n-2} &= p_1 I_n \\ &... \\ AB_1 - I_n B_0 &= p_{n-1} I_n \\ AB_0 &= p_n I_n. \end{aligned}$$

Înmulţind prima relaţie cu A^n a 2-a cu A^{n-1}, ..., $n+1$-a cu I_n respectiv şi adunând rezultă

$$p_0 A^n + p_1 A^{n-1} + ... + p_{n-1}A + p_n I_n = 0_{\mathcal{M}_n(K)} \text{ sau echivalent } P_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(K)}.$$

■

Remarcă 6.2.1 *Dacă* $\det A = p_n = P_A(0) \neq 0$ *atunci*

$$p_n I_n = -\left(\lambda \sum_{k=0}^{n-1} p_k \lambda^{n-k-1}\right)_{\lambda = A} \text{ şi deci } A^{-1} = -\frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k A^{n-k-1}.$$

6.3 Operator liniar diagonalizabil. Matrice diagonalizabilă. Puterile unei matrice diagonalizabile. Teorema de diagonalizare

Fie (X, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X = n \in N^*$ şi $U : X \to X$ endomorfism.

Definiţie 6.3.1 *O matrice* $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,...,n \\ j=1,...,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ *se numeşte diagonală dacă* $a_{i,j} = 0 \ \forall i \neq j$.

Remarcă 6.3.1 *Dacă* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *este o matrice diagonală de forma*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ atunci } A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Definiţie 6.3.2 *O matrice* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *se numeşte diagonalizabilă dacă există* C *o matrice nesingulară (inversabilă) astfel încât matricea* $D = C^{-1}AC$ *este o matrice diagonală.*

Remarcă 6.3.2 *Dacă* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *este diagonalizabilă atunci* $A^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$ *unde* $D = C^{-1} \cdot A \cdot C$ *şi* C *este matricea de trecere ce permite diagonalizarea. Într-adevăr,*

$$\begin{aligned} D &= C^{-1} \cdot A \cdot C \Longrightarrow A = C \cdot D \cdot C^{-1} \Longrightarrow \\ A^k &= \left(C \cdot D \cdot C^{-1}\right)^k = \left(C \cdot D \cdot C^{-1}\right)\left(C \cdot D \cdot C^{-1}\right) ... \left(C \cdot D \cdot C^{-1}\right) = C \cdot \underbrace{D \cdot ... \cdot D}_{de\ k\ ori} \cdot C^{-1} = C \cdot D^k \cdot C^{-1}. \end{aligned}$$

Are loc următorul rezultat general:

Teoremă 6.3.1 *O matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este diagonalizabilă dacă şi numai dacă are n vectori proprii ce formează o bază.*

Algoritmul de diagonalizare pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este următorul:

Etapa 1: Dacă $A \in \mathcal{M}(n;K)$ determinăm $P_A(\lambda)$ şi spectrul $\Lambda U = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ cu multiplicităţile $m_{a_{\lambda_1}}$, ..., $m_{a_{\lambda_p}}$ respective.

Etapa 2: Pentru $\lambda = \lambda_1$ determinăm spaţiul X_{λ_1} şi o bază B_1 a sa. Dacă $m_{g_{\lambda_1}} \neq m_{a_{\lambda_1}}$ atunci matricea A nu se diagonalizează. Însă dacă $m_{g_{\lambda_1}} = m_{a_{\lambda_1}}, \dots, m_{g_{\lambda_p}} = m_{a_{\lambda_p}}$ atunci determinăm bazele $B_1, ..., B_p$ pentru $X_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_p}$.

Etapa 3: Considerăm matricea C punând pe coloane la rând vectorii bazei B_1, apoi ai lui B_2, ... , B_p. Atunci $C^{-1} \cdot A \cdot C = D$ este matrice diagonală. Totodată, $A^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$.

Definiţie 6.3.3 *Spunem că operatorul $U \in L_K(X, X)$ este diagonalizabil dacă există o bază a lui X în raport cu care matricea sa este diagonală.*

Teoremă 6.3.2 (Teorema de caracterizare a diagonalizării) *Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$ matricea lui U într-un reper al lui X. Sunt echivalente:*

i) U diagonalizabil.

ii) Rădăcinile $\lambda_1, ..., \lambda_p$ ale polinomului caracteristic $P_A(\lambda)$ sunt în K, $m_{g_{\lambda_i}} = m_{a_{\lambda_i}}$ pentru orice $i = 1, ..., p$ şi $m_{g_{\lambda_1}} + ... + m_{g_{\lambda_p}} = n$.

Remarcă 6.3.3 *Fie $\lambda_1, ..., \lambda_p \in K$ cele p valori proprii distincte ale lui U. U este diagonalizabil dacă şi numai dacă $X = X_{\lambda_1} \oplus ... \oplus X_{\lambda_p}$ unde X_{λ_i} $(i = 1, ..., p)$ este subspaţiul propriu corespunzător lui λ_i.*

Algoritmul de diagonalizare pentru endomorfismul U este următorul:

Etapa 1: Determinăm o bază $B \subset X$ şi scriem matricea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ asociată endomorfismului U în această bază.

Etapa 2: Determinăm $P_A(\lambda)$ şi spectrul $\Lambda U = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ cu multiplicităţile $m_{a_{\lambda_1}}, ..., m_{a_{\lambda_p}}$ respective.

Etapa 3: Pentru $\lambda = \lambda_1$ determinăm spaţiul X_{λ_1} şi o bază B_1 a lui. Dacă $m_{g_{\lambda_1}} \neq m_{a_{\lambda_1}}$ atunci operatorul U nu se diagonalizează. Însă, dacă $m_{g_{\lambda_1}} = m_{a_{\lambda_1}}, \dots, m_{g_{\lambda_p}} = m_{a_{\lambda_p}}$ vom determina bazele $B_1, ..., B_p$ pentru $X_{\lambda_1}, ..., X_{\lambda_p}$.

Etapa 4: Scriem baza B' a spaţiului vectorial în raport cu care matricea asociată lui U are forma diagonală canonică, adică $B' = B_1 \cup ... \cup B_p$. Matricea asociată lui U în baza B' este matrice diagonală şi are pe diagonala principală valorile proprii $\lambda_1, ..., \lambda_p$ fiecare dintre acestea apărând de un număr de ori egal cu ordinul său de multiplicitate:

$$[D]_{B'}^{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & .. & 0 \\ 0 & \lambda_1 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & \lambda_p & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Etapa 5: Construim matricea de trecere de la reperul B la reperul B', adică $C_{B,B'}$.

Etapa 6: Verificăm corectitudinea calculelor testând valabilitatea relaţiei

$$[D]_{B'}^{U} = (C_{B,B'})^{-1} \cdot A \cdot C_{B,B'}.$$

Sala: 2103	**Noiembrie 2014**

CURS 7: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei — *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

Nota: *Acest curs nu a fost supus unui proces riguros de recenzare pentru a fi oficial publicat. El poate fi distribuit numai cu permisiunea autorului.*

7.1 Forma diagonală/forma canonică Jordan a unui endomorfism

Fie (X, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$, $U : X \to X$ endomorfism şi $\lambda \in K$ valoare proprie a lui U.

Definiţie 7.1.1 *Se numeşte celulă Jordan de ordin p ataşată scalarului $\lambda \in K$ o matrice de tip $p \times p$ de forma:*

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definiţie 7.1.2 *Se numeşte bloc Jordan de ordin $(p_1, ..., p_r)$ ataşat scalarului $\lambda \in K$ o matrice de tip $(p_1 + ... + p_r) \times (p_1 + ... + p_r)$ de forma:*

$$B_p(\lambda) = diag\left(J_{p_1}(\lambda), ..., J_{p_r}(\lambda)\right) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{p_1}(\lambda)} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & \boxed{J_{p_2}(\lambda)} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \boxed{J_{p_{r-1}}(\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & \boxed{J_{p_r}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

unde $p_1 + ... + p_r = p$.

Definiţie 7.1.3 *Se numeşte matrice sub forma canonică Jordan o matrice pătratică de ordin n pe a cărei diagonală principală se află blocuri Jordan cu scalari diferiţi, adică:*

$$J = diag\left(B_{n_1}(\lambda_1), ..., B_{n_p}(\lambda_r)\right), \ n_1 + ... + n_p = n.$$

Definiţie 7.1.4 *Spunem că U este jordanizabil, dacă există o bază în X faţă de care matricea lui U să aibă forma canonică Jordan.*

Definiţie 7.1.5 *O matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ spunem că este jordanizabilă, dacă există o matrice nesingulară $C \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $C^{-1}AC$ să fie o matrice sub forma canonică Jordan.*

7.2 Forma canonică a unui operator nilpotent

Fie (X, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X \in \mathbb{N}^*$.

Definiţie 7.2.1 *Un operator $N \in L_K(X, X)$ se numeşte nilpotent dacă există $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $N^r(\cdot) = 0_X$. Cel mai mic $r \in \mathbb{N}$ cu această proprietate se numeşte gradul lui N (sau indexul de nilpotenţă).*

Definiţie 7.2.2 *O matrice* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *se numeşte nilpotentă dacă există* $r \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(K)}$.

Remarcă 7.2.1 *O matrice nilpotentă are numai valoarea proprie zero.*

Teoremă 7.2.1 *Operatorul* $N \in L_K(X, X)$ *este nilpotent dacă şi numai dacă există* $B \subset (X, K)$ *astfel încât matricea* $[A]_B^N$ *a operatorului* N *în baza* B *este nilpotentă.*

Demonstraţie. Se observă că $[A]_B^{N^r} = \left([A]_B^N\right)^r$ şi deci $[A]_B^{N^r} = 0_X$ dacă şi numai dacă $N^r = 0_X$. ∎

Definiţie 7.2.3 *Fie operatorul* $U \in L_K(X, X)$. *Vectorul* $x \in X$, $x \neq 0_X$ *se numeşte vector propriu generalizat al lui* U *dacă există* $\lambda \in K$ *şi* $r \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$(U - \lambda 1_X)^r (x) = 0_X \tag{7.2.1}$$

iar mulţimea

$$X^\lambda = \{x \in X | (U - \lambda 1_X)^r (x) = 0_X\} = Ker (U - \lambda 1_X)^r : X \to X,$$

se numeşte spaţiul vectorilor proprii generalizaţi asociat lui λ.

Remarcă 7.2.2 *Are loc* $X_\lambda \subseteq X^\lambda$ *iar operatorul* $N(x) \overset{notăm}{=} (U - \lambda 1_X)(x) \in L_K(X, X)$ *cu proprietatea (7.2.1) este nilpotent.*

Definiţie 7.2.4 *Un ciclu (sau lanţ) de vectori proprii generalizaţi ai endomorfismului nilpotent* $N \in L_K(X, X)$ *este un şir de vectori nenuli, de forma* $\left\{v, N(v), ..., N^{r-1}(v)\right\}$ *unde* $N^r(v) = 0_X$. v *este rădăcina ciclului de vectori proprii generalizaţi,* $N^{r-1}(v)$ *este vectorul de final iar* r *este lungimea ciclului.*

Remarcă 7.2.3 *Fie operatorul* $U \in L_K(X, X)$ *şi* $A \overset{notăm}{=} [A]_B^U$ *matricea lui* U *în raport cu reperul* $B \subset X$. *Vectorul propriu generalizat* $x \neq 0_X$ *corespunzător valorii proprii* λ *se determină din sistemul* $(A - \lambda I_n)^r x_B = 0_X$ *unde* $(A - \lambda I_n)^r = 0_{\mathcal{M}_n(K)}$ *iar un ciclu de vectori proprii generalizaţi corespunzători lui* λ *este*

$$\left\{v, (A - \lambda I_n)^1 \cdot v, (A - \lambda I_n)^2 \cdot v, ..., (A - \lambda I_n)^{r-1} \cdot v\right\}. \tag{7.2.2}$$

Remarcă 7.2.4 *Ciclul de vectori proprii generalizaţi din (7.2.2) formează un sistem liniar independent.*

Teoremă 7.2.2 (Forma canonică Jordan a operatorilor nilpotenţi) *Dacă* $N \in L_K(X, X)$ *este endomorfism nilpotent atunci* N *are o bază formată din vectori proprii generalizaţi ai lui* N. *Matricea asociată lui* N *în această bază este matrice Jordan.*

7.3 Reper Jordan. Algoritm de jordanizare. Vectori principali şi nuclee principale

Fie (X, K) spaţiu vectorial cu $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$, $U : X \to X$ endomorfism.

Definiţie 7.3.1 *Se numeşte reper Jordan un reper al lui* X *în care matricea lui* U *este o matrice Jordan.*

Algoritmul de jordanizare pentru $U \in L_K(X, X)$ **este redat în cele ce urmează:**

Etapa 1. Fixăm $B \overset{bază}{\subset} X$ şi scriem matricea $A \in M_n(K)$ a lui U în raport cu această bază.

Etapa 2. Determinăm polinomul caracteristic $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$. Sunt posibile două cazuri

Caz 1. $P_A(\lambda) = 0$ nu admite n rădăcini în K situaţie în care U **nu este jordanizabil.**
Caz 2. $P_A(\lambda) = 0$ are soluţiile $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ cu $m_{a_{\lambda_1}} + ... + m_{a_{\lambda_r}} = n$ iar U **este jordanizabil** şi se continuă:

Etapa 3. Fixăm o valoare proprie λ şi calculăm matricea endomorfismului $N(\cdot) \overset{notăm}{=} U(\cdot) - \lambda 1_X(\cdot)$ în raport cu baza B. O notăm prin N această matrice.

Etapa 4. Determinăm numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie $\lambda:\ m_{g_\lambda} = \dim_K KerN(\cdot) = \dim_K X_\lambda$. Pot să existe două cazuri

Caz 1. Dacă $m_{g_\lambda} = m_{a_\lambda}$ o bază pentru X_λ va fi formată din m_{g_λ} vectori proprii liniar independenţi. Deci, pentru λ vom avea m_{a_λ} celule Jordan de forma $J_1(\lambda)$.
Caz 2. Dacă $m_{g_\lambda} < m_{a_\lambda}$ se trece la:

Etapa 5. Determinăm $s \in \mathbb{N}^*$, minim, $s \leq m_{a_\lambda}$, astfel încât $rangN^s = rangN^{s+p}\ \forall p \in \mathbb{N}$.

Etapa 6. Determinăm n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1, 2, ..., s\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde $rangN^0 = rang\left(I_{\mathcal{M}_n(K)}\right) = n$, $rangN^{s+1} = rangN^s$, $\Sigma_{h=1}^s hn_h = m_{a_\lambda}$.

Etapa 7. Se repetă algoritmul începând cu **Etapa 3** pentru fiecare valoare proprie a lui U.

Etapa 8. Se scrie matricea J a lui U sub forma canonică Jordan.

Etapa 9. Ţinând seama de definiţia matricei unei aplicaţii liniare în raport cu un reper, se determină reperul B' a lui X în raport cu care U are matricea J.

Remarcă 7.3.1 *Vectorul $v_1 \in X$, $v_1 \neq 0$ definit prin $N(v_1) = 0_X$ se numeşte vector propriu iar vectorii v_2, v_3, ... , v_s definiţi prin*

$$N(v_2) = v_1, ..., N(v_s) = v_{s-1} \tag{7.3.1}$$

se numesc vectori proprii principali. Nucleele

$$KerN(\cdot), ..., KerN^{s-1}(\cdot)$$

se numesc nuclee principale. În reprezentarea matriceală (7.3.1) este echivalent cu

$$(A - \lambda I_n) v_2 = v_1,\ ...\ ,\ (A - \lambda I_n)^{s-1} v_s = v_{s-1}.$$

Remarcă 7.3.2 *Matricea Jordan J este unic determinată de matricea A, până la o permutare a blocurilor de pe diagonala principală.*

Exerciţiul 7.3.1 *Fie $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ spaţiul vectorial al matricelor de tip 2×2 cu elemente numere reale şi*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

matricea operatorului $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ în baza canonică din $\mathbb{R}$. Să se determine forma canonică Jordan şi o bază în care este atinsă această formă.

Soluţie. Observăm că polinomul caracteristic este

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2.$$

Deducem de aici că A este matrice nilpotentă. Se rezolvă ecuaţia $P_A(\lambda) = 0$ de unde deducem că $\lambda = 3 \in \mathbb{R}$ cu $m_{a_\lambda} = 2$.

Etapa 3. Pentru $\lambda = 3$ se obţine matricea

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Etapa 4. Se determină numărul celulelor Jordan pentru valoarea proprie λ : $d = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot)$ unde

$$KerN(\cdot) = \left\{ x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observăm că $rangN = 1$ unde $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Astfel că $\left\{(-1,-1)^T\right\}$ este sistem liniar independent maximal în $KerN(\cdot)$ şi deci $1 = \dim_{\mathbb{R}} KerN(\cdot) < m_{a_\lambda} = 2$. Trecem la:

Etapa 5. Se observă că

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

si deci $s = 2$.

Etapa 6. Se determină n_h numărul celulelor Jordan de ordin $h \in \{1, 2\}$ după formula

$$n_h = rangN^{h+1} - 2rangN^h + rangN^{h-1}$$

unde $rangN^0 = rangI_2 = 2$, $rangN^{s+1} = rangN^s$, $\Sigma_{h=1}^s hn_h = m_{a_\lambda}$. Pentru aceasta, se observă că

$$rangN = 1, rangN^2 = rangN^3 = 0.$$

Astfel că

$$\begin{array}{l} n_1 = rangN^2 - 2rangN^1 + rangN^0 = 0 - 2 + 2 = 0 \\ n_2 = rangN^3 - 2rangN^2 + rangN^1 = 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array}$$

Aşadar matricea Jordan asociată lui A are: 0 celule de ordin 1¸ 1 celulă de ordin 2:

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ţinând seama de definiţia matricei unei aplicaţii liniare în raport cu un reper, se determină reperul $B' = \left\{ v_1 = (a_1, b_1)^T, v_2 = (a_2, b_2)^T \right\}$ a lui $\mathbb{R}^2$ în raport cu care U are matricea J:

$$\begin{array}{l} U(v_1) = 3v_1 \\ U(v_2) = v_1 + 3v_2 \end{array} \iff \begin{array}{l} Av_1 = 3v_1 \\ Av_2 = v_1 + 3v_2 \end{array} \iff \begin{array}{l} (A - 3I_2) v_1 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ (A - 3I_2) v_2 = v_1 \end{array}$$

Alegând $v_1 = (a_1, b_1)^T$ în $(A - 3I_2) v_1 = 0_{\mathbb{R}^2}$ obţinem

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -a_1 + b_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = b_1 \Longrightarrow v_1 = a_1 (1,1)^T$$

Alegând $v_2 = (a_2, b_2)^T$ şi $v_1 = (1,1)^T$ corespunzător lui $a_1 = 1$, în $(A - 3I_2) v_2 = v_1$ obţinem

$$\begin{aligned} (A - 3I_2) v_2 &= v_1 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow -a_2 + b_2 = 1 \Longrightarrow a_2 = b_2 - 1 \Longrightarrow v_2 = (b_2 - 1, b_2)^T. \end{aligned}$$

Astfel că $B' = \left\{ v_1 = (1,1)^T, v_2 = (1,2)^T \right\}$ este reperul Jordan în care este atinsă forma J. În plus, putem spune că $v = (1,2)^T$ este vector propriu principal. Observăm că

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = J \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

adică nu s-a greşit la calcule şi în plus matricea C are pe coloane vectorii v_1, v_2. ■

Sala: 2103	**Noiembrie 2014**

CURS 8: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei — *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

Nota: *Acest curs nu a fost supus unui proces riguros de recenzare pentru a fi oficial publicat. El poate fi distribuit numai cu permisiunea autorului.*

8.1 Aplicaţii la forma canonică Jordan. Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi omogene: sistem fundamental de soluţii, soluţia generală (cazul bidimensional)

Definiţie 8.1.1 *Un simbol matematic de forma*

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z \\ z' = a_{21}y + a_{22}z \end{cases} \quad cu \quad \begin{array}{ll} y : G \longrightarrow D_1, & y = y(x) \\ z : G \longrightarrow D_2, & z = z(x) \end{array} \tag{8.1.1}$$

unde $G \subseteq \mathbb{R}$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, $D_2 \subseteq \mathbb{R}$ iar a_{ij} sunt constante reale, se numeşte sistem de două ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi cu două funcţii necunoscute, cu coeficienţi constanţi, omogen.

Definiţie 8.1.2 *Un sistem de două funcţii $y(x) : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1$ respectiv $z(x) : G \subseteq \mathbb{R} \to D_2$ derivabile cu derivata continuă pe G, formează o soluţie a sistemului omogen (8.1.1) pe G dacă verifică sistemul (8.1.1) pentru orice $x \in G$. Sistemul de funcţii $y(x)$, $z(x)$ cu această proprietate se notează prin $\varphi(x) = (y(x), z(x))^T$ iar despre $\varphi : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$ spunem că este soluţie a lui (8.1.1).*

Definiţie 8.1.3 *Fie următoarele două soluţii*

$$\varphi_1(x) = (y_1(x), z_1(x))^T : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2 \text{ şi } \varphi_2(x) = (y_2(x),\ z_2(x))^T : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$$

ale sistemului (8.1.1). Se spune că $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ formează un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (8.1.1) pe G dacă sunt liniar independente. Altfel spus, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ formează un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (8.1.1) pe G dacă

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ z_1(x) & z_2(x) \end{vmatrix}$$

numit wronskianul celor două soluţii $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ nu se anulează în niciun punct din G.

Remarcă 8.1.1 *Dacă determinantul $W(x)$ a două soluţii ale sistemului este diferit de zero într-un punct din G atunci el este diferit de zero pe G.*

Teoremă 8.1.1 *Fie sistemul (8.1.1). Dacă $\varphi_1 : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$, $\varphi_2 : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2$ sunt soluţii ale sistemului (8.1.1) ce formează un sistem fundamental de soluţii pe G, atunci soluţia generală a sistemului (8.1.1) este dată de $w(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ unde $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$ sunt constante arbitrare.*

Remarcă 8.1.2 *Dacă $U : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ este operatorul de derivare definit prin $U(\varphi) = \varphi'$ atunci sistemul (8.1.1) se scrie sub forma echivalentă $\varphi' = A\varphi$ unde*

$$A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]_{B_c}^{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

este matricea operatorului U în reperul canonic B_c al lui $\mathbb{R}^2$ iar $\varphi = (y, z)^T : G \to D_1 \times D_2$.

Remarcă 8.1.3 *Mulţimea* $S_A = \{\varphi(\cdot) : G \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \times D_2 | \varphi(\cdot)$ *verifică* $\varphi'(x) = A\varphi(x)\}$ *este subspaţiu vectorial de dimensiune* 2 *al spaţiului* $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ *al aplicaţiilor de clasă* C^1 *de la* $\mathbb{R}$ *la* $\mathbb{R}^2$.

Prezentăm un algoritm de determinare a soluţiei generale a sistemului (8.1.1).

Fie $K_1 \neq 0$, $K_2 \neq 0$, c_1, c_2 constante reale. Definim $U(w) = w' = A \cdot w$. Se rezolvă ecuaţia caracteristică

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

şi se scrie ΛU respectiv m_{a_λ}. Soluţia generală a sistemului (8.1.1) este

$$w(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \; c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R} \tag{8.1.2}$$

unde $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ este un sistem fundamental de soluţii ce se determină parcurgând unul din cazurile următoare precizat de valoarea proprie λ:

Caz 1. Dacă $\lambda = \alpha + i\beta \in \Lambda U$ $(\beta > 0)$ se determină un vector propriu $v_\lambda = v_1 + iv_2 \in X_\lambda$ cu ajutorul căruia se scriu soluţiile

$$\varphi_1(x) = Re\left(e^{\lambda x}v_\lambda\right) = e^{\alpha x}(v_1 \cdot \cos\beta x - v_2 \sin\beta x) \text{ şi } \varphi_2(x) = Im\left(e^{\lambda x}v_\lambda\right) = e^{\alpha x}(v_1 \cdot \sin\beta x + v_2 \cos\beta x), \; x \in \mathbb{R}$$

corespunzătoare valorilor proprii λ şi respectiv $\overline{\lambda}$. (În calcule, se recomandă deducerea acestor formule din relaţia lui Euler $e^{ia} = \cos a + i \sin a$, $a \in \mathbb{R}$).

Caz 2. Dacă $\lambda_1 \in \mathbb{R} \cap \Lambda U$ cu $m_{a_{\lambda_1}} = 1$ atunci şi $\lambda_2 \in \mathbb{R} \cap \Lambda U$ cu $m_{a_{\lambda_2}} = 1$. În acest caz, dacă $m_{a_{\lambda_1}} = m_{g_{\lambda_2}}$ şi $m_{a_{\lambda_2}} = m_{g_{\lambda_2}}$ matricea A este diagonalizabilă $\Longrightarrow$ există o bază B în care matricea $A_1 \overset{not}{=} [A_1]_B^U$ este diagonală. În fapt,

$$[A_1]_B^U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Notăm $B = \{v_1, v_2\}$ unde

$$\begin{cases} v_1 = (m, n)^T \text{ este vectorul propriu corespunzător lui } \lambda_1 \text{ ce se determina din } (A - \lambda_1 I_2)v_1 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ v_2 = (p, q)^T \text{ este vectorul propriu corespunzător lui } \lambda_2 \text{ ce se determina din } (A - \lambda_2 I_2)v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$$

Scriem matricea diagonalizatoare

$$C = C_{B_c, B} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \text{ cu } A_1 = C^{-1}AC.$$

Scriem sistemul astfel

$$w' = Aw$$

şi efectuăm schimbarea de variabilă

$$w = Cu \text{ unde } u = (u_1, u_2)^T.$$

Prin schimbarea de variabilă, avem

$$(Cu)' = ACu \Longleftrightarrow Cu' = ACu | \cdot C^{-1} \Longleftrightarrow u' = C^{-1}ACu \Longleftrightarrow u' = A_1 u.$$

Din

$$u' = A_1 u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 \\ \lambda_2 u_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1' = \lambda_1 u_1 \\ u_2' = \lambda_2 u_2 \end{cases}$$

obţinem

$$\begin{aligned} \frac{u_1'}{u_1} &= \lambda_1 \Longrightarrow (\ln|u_1|)' = \lambda_1 \Longrightarrow \ln|u_1| = \int \lambda_1 dx \Longleftrightarrow \ln|u_1| = \lambda_1 x + \ln|K_1| \Longrightarrow u_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \\ \frac{u_2'}{u_2} &= \lambda_2 \Longrightarrow (\ln|u_2|)' = \lambda_2 \Longrightarrow \ln|u_2| = \int \lambda_2 dx \Longleftrightarrow \ln|u_2| = \lambda_2 x + \ln|K_2| \Longrightarrow u_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}. \end{aligned}$$

Revenim la schimbarea de variabilă

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

de unde obtinem solutia în coordonate

$$\begin{cases} y(x) = mu_1 + pu_2 = mc_1 e^{\lambda_1 x} + pc_2 e^{\lambda_2 x} \\ z(x) = nu_1 + qu_2 = nc_1 e^{\lambda_1 x} + qc_2 e^{\lambda_2 x} \end{cases}$$

iar dacă dorim să determinăm două soluţii ale sistemului, scriem

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 x} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Longleftrightarrow w(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x),$$

de unde obtinem $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} v_{\lambda_1}$ şi $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} v_{\lambda_2}$ cu ajutorul cărora se scrie soluţia generală (8.1.2).

Caz 3. Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R} \cap \Lambda U$ atunci $\lambda \overset{not\breve{a}m}{=} \lambda_1 = \lambda_2$ şi observăm că $m_{a_\lambda} = 2$. Dacă $m_{a_\lambda} = m_{g_\lambda}$ aplicăm **Caz 2** deoarece A este diagonalizabilă iar dacă $m_{g_\lambda} < m_{a_\lambda} = 2$ matricea A este jordanizabilă $\Longrightarrow$ există o bază B' în care matricea $A_2 \overset{not}{=} [A_2]_{B'}^U$ este sub forma canonică Jordan. În fapt,

$$J = [A_2]_{B'}^U = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Notăm $B' = \{v_1, v_2\}$ unde

$$\begin{cases} v_1 = (m,n)^T \text{ se determina din } (A - \lambda I_2) v_1 = 0_{\mathbb{R}^2} \\ v_2 = (p,q)^T \text{ se determina din } (A - \lambda_2 I_2) v_2 = v_1, \end{cases}$$

(v_1 este vectorul propriu corespunzător lui λ iar v_2 este vector propriu generalizat/principal). Atunci matricea jordanizatoare este

$$C = C_{B_c, B'} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow \\ v_1 & v_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \text{ cu } J = C^{-1} A C.$$

Scriem sistemul astfel

$$w' = Aw$$

şi efectuăm schimbarea de variabilă

$$w = Cu \text{ unde } u = (u_1, u_2)^T.$$

Prin schimbarea de variabilă, avem

$$(Cu)' = ACu \Longleftrightarrow Cu' = ACu | \cdot C^{-1} \Longleftrightarrow u' = C^{-1} ACu \Longleftrightarrow u' = A_1 u.$$

Din

$$u' = A_1 u \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + u_2 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1' = \lambda u_1 + u_2 \\ u_2' = \lambda u_2. \end{cases}$$

Din $u_2' = \lambda u_2 \implies u_2(x) = c_2 e^{\lambda x}$. Înlocuim $u_2(x) = c_2 e^{\lambda x}$ în $u_1' = \lambda u_1 + u_2 \Longrightarrow u_1' = \lambda u_1 + c_2 e^{\lambda x}$. Observăm că

$$\begin{aligned} u_1' = \lambda u_1 + c_2 e^{\lambda x} \Big| \cdot e^{-\lambda x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(u_1 e^{-\lambda x}\right)' = c_2 \Longrightarrow \int \left(u_1 e^{-\lambda x}\right)' dx = \int c_2 dx \\ &\Longrightarrow \quad u_1 e^{-\lambda x} = c_2 x + c_1 \Longrightarrow u_1(x) = c_2 x e^{\lambda x} + c_1 e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Revenim la schimbarea de variabilă

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

de unde obtinem soluţia generală în coordonate

$$\begin{cases} y(x) = mu_1 + pu_2 = m\left(c_2 x e^{\lambda x} + c_1 e^{\lambda x}\right) + pc_2 e^{\lambda x} \\ z(x) = nu_1 + qu_2 = n\left(c_2 x e^{\lambda x} + c_1 e^{\lambda x}\right) + qc_2 e^{\lambda x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y(x) = c_2\left(mxe^{\lambda x} + pe^{\lambda x}\right) + mc_1 e^{\lambda x} \\ z(x) = c_2\left(nxe^{\lambda x} + qe^{\lambda x}\right) + nc_1 e^{\lambda x}. \end{cases}$$

Putem scrie două soluţii ale sistemului, astfel

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} me^{\lambda x} \\ ne^{\lambda x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} mxe^{\lambda x} + pe^{\lambda x} \\ nxe^{\lambda x} + qe^{\lambda x} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow w(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

de unde obţinem $\varphi_1(x) = \left(me^{\lambda x}, ne^{\lambda x}\right)^T$ şi $\varphi_2(x) = \left(mxe^{\lambda x} + pe^{\lambda x}, nxe^{\lambda x} + qe^{\lambda x}\right)^T$ cu ajutorul cărora se scrie soluţia generală (8.1.2).

Remarcă 8.1.4 *Dacă $U : D_1 \times ... \times D_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este operatorul de derivare definit prin $U(\varphi) = \varphi'$ atunci sistemul $\varphi' = A\varphi$ unde*

$$A \overset{not\breve{a}m}{=} [A]_{B_c}^U = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

este matricea operatorului U în reperul canonic B_c al lui $\mathbb{R}^n$ iar $\varphi(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))^T : G \to D_1 \times ... \times D_n$ se tratează absolut analog.

Sala: 2103	**Noiembrie 2014**

CURS 9: ALGEBRĂ

Conf. univ. dr.: Dragoş-Pătru Covei — *Specializarea: C.E., I.E., S.P.E.*

Nota: *Acest curs nu a fost supus unui proces riguros de recenzare pentru a fi oficial publicat. El poate fi distribuit numai cu permisiunea autorului.*

9.1 Funcţionale liniare. Dualul algebric al unui spaţiu liniar

Fie (X, K) spaţiu vectorial.

Definiţie 9.1.1 *O funcţie $f : X \to K$ se numeşte funcţională (sau formă) liniară dacă f este operator liniar, adică*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall x, y \in X, \ \forall \alpha, \beta \in K.$$

Teoremă 9.1.1 *Mulţimea $X^* = L(X, K)$ a funcţionalelor liniare $f : X \to K$ înzestrată cu operaţiile*

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x \in X$;

ii) $(\alpha f)x = \alpha f(x)\ \forall x \in X,\ \forall \alpha \in K$;

are o structură de spaţiu vectorial peste K, notat (X^*, K) şi numit spaţiul vectorial dual al lui X.

Remarcă 9.1.1 (Reprezentarea unei funcţionale liniare) *Presupunem că $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $E = \{e_1, ..., e_n\}$ este bază a lui X, $a_i = f(e_i)$, $i = \overline{1, n}$, $a = (a_1, ..., a_n)^T$ şi $x_E = (x_1, ..., x_n)^T$ atunci*

$$\forall x \in X \Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ şi } f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a_1 ... a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = a^T \cdot x_E.$$

9.2 Funcţionale biliniare şi sesquiliniare

Fie (X, K) şi (Y, K) spaţii vectoriale reale sau complexe (adică $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$).

Definiţie 9.2.1 *O funcţie $f : X \times Y \to K$ se numeşte funcţională (sau formă) biliniară dacă*

i) $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)\ \forall x, y \in X,\ \forall z \in Y,\ \forall \alpha, \beta \in K$;

ii) $f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)\ \forall x \in X,\ \forall y, z \in Y,\ \forall \alpha, \beta \in K$.

Remarcă 9.2.1 *Dacă se fixează $z \in Y$ rezultă din i) că f este o Funcţională liniară pe X iar dacă se fixează $x \in X$ rezultă din ii) că f este o funcţională liniară pe Y.*

Remarcă 9.2.2 *Dacă $x = 0_X$ sau $y = 0_Y$ atunci $f(0_X, y) = 0\ \forall y \in Y$ şi $f(x, 0_Y) = 0\ \forall x \in X$.*

Exemplul 9.2.1 *Dacă $f : X \to K$ şi $g : Y \to K$ sunt funcţionale liniare atunci $h : X \times Y \to K$ definită prin $h(x, y) = f(x) g(y)$ este o funcţională biliniară. Într-adevăr, pentru $x \in X$ fixat, $x = \overline{x}$ se deduce că $h(\overline{x}, y) = f(\overline{x}) g(y)$ este funcţie liniară în $y \in X$, deoarece $f(\overline{x}) \in K$ este un scalar. Analog, pentru y fixat.*

Exemplul 9.2.2 *Fie* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$*. Pentru* $x, y \in \mathbb{K}^n$ *definim*

$$f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow K,\ f(x, y) = x^T A y \in K.$$

Probăm că f *este o funcţională biliniară. Într-adevăr,*

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y, z) &= (\alpha x + \beta y)^T Az = (\alpha x)^T Az + (\beta y)^T Az = \alpha x^T Az + \beta y^T Az = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z), \\ f(x, \alpha y + \beta z) &= x^T A(\alpha y + \beta z) = x^T A(\alpha y) + x^T A(\beta z) = \alpha x^T Ay + \beta x^T Az = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z). \end{aligned}$$

Remarcă 9.2.3 *Adunarea formelor biliniare şi înmulţirea cu scalari se definesc în mod similar ca la funcţionalele liniare. În raport cu aceste operaţii, mulţimea tuturor formelor biliniare este un spaţiu vectorial peste corpul scalarilor.*

Definiţie 9.2.2 *Funcţia* $f : X \times X \to \mathbb{C}$ *se numeşte funcţională (sau formă) sesquiliniară dacă*

$$\begin{aligned} &i) \quad f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z) \quad \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \\ &ii) \quad f(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} f(x, y) + \overline{\beta} f(x, z) \quad \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

unde prin $\overline{\alpha}$ *respectiv* $\overline{\beta}$ *am notat numărul complex conjugat lui* α *respectiv* β*.*

9.3 Reprezentarea matriceală şi forma algebrică. Funcţionale biliniare simetrice şi sesquiliniare hermitiene

Presupunem că (X, K) şi (Y, K) sunt spaţii vectoriale reale sau complexe cu $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $\dim_K Y = m \in \mathbb{N}^*$ iar $f : X \times Y \to K$ este funcţională biliniară.

Remarcă 9.3.1 *Dacă*

$$\begin{aligned} &F = \{f_1, ..., f_n\} \overset{bază}{\subset} X \\ &G = \{g_1, ..., g_m\} \overset{bază}{\subset} Y \\ &x_F = (x_1, ..., x_n)^T \text{ este vectorul coordonatelor unui element } x \in X \text{ în baza } F \\ &y_G = (y_1, ..., y_m)^T \text{ este vectorul coordonatelor unui element } y \in Y \text{ în baza } G \end{aligned}$$

atunci

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i, \sum_{j=1}^{m} y_j g_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j f(f_i, g_j). \tag{9.3.1}$$

Este necesar să introducem:

Definiţie 9.3.1 *Matricea*

$$A = [A]_{F,G}^{f} = \begin{pmatrix} f(f_1, g_1) & ... & f(f_1, g_m) \\ ... & ... & ... \\ f(f_n, g_1) & ... & f(f_n, g_m) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$$

se numeşte matricea lui f *în raport cu bazele* F, G *iar numerele* $a_{ij} = f(f_i, g_j) \in K$ $(i = 1, ..., n$ *şi* $j = 1, ..., m)$ *se numesc coeficienţii funcţionalei biliniare* f *în perechea de baze* $F = \{f_1, ..., f_n\} \subset X$, $G = \{g_1, ..., g_m\} \subset Y$*. Cu aceste notaţii formula (9.3.1) se poate scrie astfel*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij} = (x_F)^T A y_G$$

iar reprezentarea $f(x, y) = (x_F)^T A y_G$ *se numeşte reprezentarea matriceală a funcţionalei biliniare* f *în timp ce* $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j a_{ij}$ *se numeşte forma algebrică a funcţionalei biliniare* f*.*

Definiţie 9.3.2 *Presupunem* $\dim_K X = \dim_K Y = n \in \mathbb{N}^*$. *Fie* A *matricea funcţionalei biliniare* $f : X \times Y \to K$ *în raport cu bazele* F, G *din* X *respectiv* Y. *Dacă matricea* A *este nesingulară (singulară), atunci forma biliniară* f *se numeşte nedegenerată (degenerată). Rangul matricei* A *se numeşte rangul formei biliniare* f.

Remarcă 9.3.2 *Dacă* $X = Y$ *atunci* $F = G$ *în Definiţia 9.3.2.*

Remarcă 9.3.3 *Unei matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ *i se poate asocia o formă biliniară.*

Remarcă 9.3.4 *Dacă* $X = Y$ *atunci* $F = G$ *iar* $f(x,y) = (x_F)^T A y_F$ *unde* $A \overset{\text{notăm}}{=} [A]_F^f$ *este matricea lui* f *în raport cu baza* F. *În plus, matricea* A *cu această proprietate este unică.*

Exemplul 9.3.1 *Dacă*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

atunci funcţionala biliniară asociată matricei A *este*

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_2(2x_1 + 4y_1) + x_2(x_1 + 2y_1). \tag{9.3.2}$$

Definiţie 9.3.3 *Fie* (X, K) *spaţiu vectorial real sau complex. O funcţională biliniară* $f : X \times X \to K$ *se numeşte*

i) simetrică dacă $f(x,y) = f(y,x)$ *pentru orice* $x, y \in X$;

ii) antisimetrică dacă $f(x,y) = -f(y,x)$ *pentru orice* $x, y \in X$.

Teoremă 9.3.1 *Fie* (X, K) *spaţiu vectorial real sau complex cu* $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă* $f : X \times X \to K$ *este o funcţională biliniară, ce are matricea* $A = [A]_B^f$ *în baza* $B \subset X$, *atunci* f *este simetrică (respectiv antisimetrică) dacă şi numai dacă* $A = A^t$ *(respectiv* $A = -A^t$*).*

Remarcă 9.3.5 *Funcţionala biliniară definită în (9.3.2) este simetrică.*

Definiţie 9.3.4 *Fie* $(X, \mathbb{C})$ *spaţiu vectorial complex. O funcţională sesquiliniară* $f : X \times X \to \mathbb{C}$ *se numeşte funcţională sesquiliniară hermitienă (sau sesquiliniară simetrică) dacă*

$$f(x,y) = \overline{f(y,x)} \text{ pentru orice } x, y \in X.$$

Remarcă 9.3.6 *Fie* $(X, \mathbb{C})$ *spaţiu vectorial complex. Dacă* $f : X \times X \to \mathbb{C}$ *este funcţională sesquiliniară hermitienă atunci* $f(x,x) = \overline{f(x,x)}$ *pentru orice* $x \in X$ *şi deci* $f(x,x) \in \mathbb{R}$.

Definiţie 9.3.5 *Fie* (X, K) *spaţiu vectorial real sau complex. O funcţională* $f : X \times X \to K$ *(unde* $K = \mathbb{R}$ *sau* $K = \mathbb{C}$*) este:*

i) pozitiv semidefinită (respectiv pozitiv definită) dacă este hermitieană şi $f(x,x) \geq 0$ *pentru* $x \in X$ *(respectiv* $f(x,x) > 0$ *pentru* $x \neq 0$*);*

ii) negativ semidefinită (respectiv negativ definită) dacă este hermitieană şi $f(x,x) \leq 0$ *pentru* $x \in X$ *(respectiv* $f(x,x) < 0$ *pentru* $x \neq 0$*);*

iii) nedefinită dacă există x_1, $x_2 \in X$ *astfel încât* $f(x_1, x_1) < 0$ *şi* $f(x_2, x_2) > 0$.

9.4 Efectul schimbării bazelor la matricea unei funcţionale biliniare

Presupunem că (X, K) şi (Y, K) sunt spaţii vectoriale reale sau complexe cu $\dim_K X = n \in \mathbb{N}^*$ şi $\dim_K Y = m \in \mathbb{N}^*$ iar $f : X \times Y \to K$ este funcţională biliniară.

Remarcă 9.4.1 *Dacă*

$$\begin{array}{l} F_1 = \left\{f_1^1, ..., f_n^1\right\} \overset{bază}{\subset} X,\ F_2 = \left\{f_1^2, ..., f_n^2\right\} \overset{bază}{\subset} X \\ G_1 = \left\{g_1^1, ..., g_m^1\right\} \overset{bază}{\subset} Y,\ G_2 = \left\{g_1^2, ..., g_m^2\right\} \overset{bază}{\subset} Y \\ x_{F_1} = (x_1, ..., x_n)^T \text{ este vectorul coordonatelor elementului } x \in X \text{ în baza } F_1 \\ y_{G_1} = (y_1, ..., y_m)^T \text{ este vectorul coordonatelor elementului } y \in Y \text{ în baza } G_1 \\ C \overset{notăm}{=} C_{F_1,F_2} \text{ este matricea de trecere de la baza } F_1 \text{ la baza } F_2, \\ D \overset{notăm}{=} D_{G_1,G_2} \text{ este matricea de trecere de la baza } G_1 \text{ la baza } G_2, \\ A = [A]_{F_1,G_1}^f \text{ este matricea lui } f \text{ în raport cu bazele } F_1,\ G_1, \end{array}$$

atunci

$$f(x, y) = (x_{F_1})^T A y_{G_1} = (C \cdot x_{F_2})^T \cdot A \cdot (D \cdot y_{G_2}) = (x_{F_2})^T \cdot C^T \cdot A \cdot D \cdot y_{G_2}$$

unde $x_{F_2} = C^{-1} \cdot x_{F_1}$, $x_{G_2} = D^{-1} \cdot x_{G_1}$.

Remarcă 9.4.2 *Dacă* $X = Y$ *atunci* $F_1 = G_1$ *şi* $F_2 = G_2$ *iar* $f(x, y) = (x_{F_1})^T \cdot C^T \cdot A \cdot C y_{F_2}$ *unde* $C \overset{notăm}{=} C_{F_1,F_2}$ *este matricea de trecere de la baza* F_1 *la baza* F_2.